Andrzej Łachwa

Który zbiór wybrać?

1. Wstęp

Gdy mówię o zbiorze monet w portmonetce, to najlepszą strukturą danych może okazać się torba, czyli zbiór z powtórzeniami. Gdy myślę o czasie, jaki upłynie od chwili, gdy to piszę, do końca dnia, to najlepszym modelem tego odcinka czasu wydaje mi się zbiór mereologiczny. Gdy słyszę o wysokiej opłacalności pewnej inwestycji, to właściwym modelem tej oceny będzie zbiór, który nazywam zbiorem dobrze rozmytym. Gdy rozważam ogół kandydatów, którzy zaczną w tym roku studiować informatykę, to myślę o zbiorze przybliżonym.

O sukcesie pracy informatyka decyduje między innymi umiejętność dobrania dla problemu dotyczącego pewnej rzeczywistości właściwego modelu owego świata i odpowiedniej metody obliczeniowej. Modelem najpowszechniej stosowanym i w nauce, i w praktyce zawodowej, i także w życiu codziennym – jest zbiór. Niestety proces naszej edukacji powoduje, że z uporem stosujemy dystrybutywne pojęcie zbioru, podczas gdy w wielu sytuacjach bardziej właściwe byłoby użycie zbiorów rozumianych w inny sposób. Aby przełamać ten szkolny schemat myślenia o zbiorze, musimy przede wszystkim poznać inne pojęcia zbioru. Wtedy będziemy mogli wybierać lepsze modele i bardziej adekwatne metody obliczeniowe dla stawianych nam zadań.

2. Zbiór dystrybutywny

Zbiór dystrybutywny to pewien abstrakt. Pojmujemy go „bądź jako wytwór myśli, bądź jako mający realność od myśli niezależną, różną przy tym od realności przedmiotów materialnych i zjawisk psychicznych" ([9], s. 122). Według Jerzego Cantora zbiór, to „każda wielość, która da się pomyśleć jako jedność, tzn. każdy ogół określonych elementów, który można za pomocą jakiegoś prawa powiązać w całość".

Stosunek należenia elementu do tak pojmowanego zbioru nie jest ani przechodni, ani zwrotny.

Tak rozumianym zbiorem jest na przykład ogół liczb pierwszych, a prawem, które wiąże w całość te liczby, jest definicja liczby pierwszej. Według tej definicji każda liczba albo jest, albo nie jest liczbą pierwszą (albo należy, albo nie należy do tego zbioru).

Z dystrybutywnym, czyli abstrakcyjnym, pojęciem zbioru wiąże się problem nieskończoności i znaczna część współczesnej matematyki. Jej osiągnięcia spróbuję tu krótko podsumować (por. [9], s. 126 i n.).

Znamy rozmaite antynomie dotyczące pojęcia zbioru. Dla ich uniknięcia pod koniec XIX w. podjęto prace nad sformalizowaniem definicji zbioru. Najbardziej znana obecna postać definicji aksjomatycznej pochodzi od Zermelo, Fraenkla i Skolema (z połowy poprzedniego wieku).

Aksjomatyka ta składa się z następujących elementów:

- aksjomatu ekstensjonalności (dwa zbiory mające te same elementy są tym samym zbiorem),
- aksjomatów wyróżniania (dla dowolnego zbioru i dowolnego jednoargumentowego predykatu istnieje zbiór złożony z tych i tylko tych elementów, które spełniają predykat),
- aksjomatu pary (dla dowolnych dwóch indywiduów istnieje zbiór złożony dokładnie z tych indywiduów),
- aksjomatu sumy (dla każdej niepustej rodziny zbiorów istnieje ich suma, czyli zbiór, którego elementami są dokładnie te elementy, które należą do zbiorów tej rodziny),
- aksjomatu zbioru potęgowego (dla dowolnego zbioru istnieje jego zbiór potęgowy, czyli taki zbiór, którego elementami są podzbiory tamtego),
- aksjomatu wyboru (iloczyn kartezjański rodziny zbiorów parami rozłącznych i niepustych jest zbiorem niepustym),
- aksjomatu nieskończoności (istnieje zbiór nieskończony),
- aksjomatów zastępowania (jeśli dziedzina jakiejś funkcji jest zbiorem, to jej przeciwdziedzina jest także zbiorem),
- aksjomatu ufundowania (w każdym niepustym zbiorze istnieje element o tej własności, że część wspólna tego elementu i tamtego zbioru jest pusta).

Takie przedstawienie pojęcia zbioru dystrybutywnego nie jest z pewnością popularne. Prawdopodobnie jest ono zrozumiałe tylko dla wąskiego kręgu osób o solidnym wykształceniu. Jednak nawet dla specjalistów ujęcie to nie jest pozbawione wad. Najpoważniejszą z nich jest nieskończoność powyższej aksjomatyki (ze względu na występowanie tu dwóch schematów: wyróżniania i zastępowania). Następną jest to, że aksjomat wyboru nie podaje efektywnego sposobu tworzenia zbioru złożonego z reprezentantów zbiorów tworzących daną rodzinę zbiorów. Używanie takiego aksjomatu wiąże się zatem z akceptacją idei platonizmu i prowadzi do pewnych paradoksalnych konsekwencji. Kolejną jest to, że schemat zastępowania korzysta z pojęcia funkcji, a dokładniej z pojęcia formuły o dwóch zmiennych spełniających warunek jednoznaczności. Formuła taka ma być przeto pojęciem bardziej pierwotnym od definiowanego pojęcia zbioru. Wydaje mi się to dyskusyjne, logika predykatów bowiem wykorzystuje „na każdym kroku" intuicyjne pojęcie zbioru dystrybutywnego, i to w dodatku zbioru nieskończonego.

Inna definicja aksjomatyczna pochodzi od von Neumanna, Bernaysa i Gödla. Aksjomatyka jest tutaj skończona, ale pojawia się konieczność wyróżnienia klas, czyli zbiorów, na które nałożono pewne ograniczenia, np. takie, że klasa nie może być elementem innej klasy. Obie aksjomatyki, oznaczane od nazwisk ich twórców akronimami ZFS i NBG, są uważane za najważniejsze osiągnięcia podstaw matematyki.

Moim zdaniem, z punktu widzenia modelowania rzeczywistości przez informatyka rozwiązującego konkretne problemy obliczeniowe wystarczy pozostać przy nieformalnej, ale bardzo intuicyjnej definicji Cantora. Być może uważam tak dlatego, że informatyk zajmuje się głównie zbiorami skończonymi, co wcale nie oznacza, że są one małe. Dla przykładu w hurtowniach danych mamy do czynienia z miliardami rekordów. Jeżeli szukamy w takim zbiorze jakiegoś podzbioru, to przestrzeń poszukiwań staje się niewyobrażalnie wielka (liczby wszystkich możliwości nie zdążylibyśmy napisać, cyfra po cyfrze, przez całe życie). Innym przykładem niech będzie problem komiwojażera. Ścieżkę łączącą 20 miast, które musi odwiedzić, możemy wyznaczyć na 2 tryliony sposobów, dla 30 miast będą to już kwintyliony. Przy takich liczbach bledną problemy arytmetyki pozaskończonych liczb kardynalnych.

3. Zbiór z powtórzeniami

Powrócę do definicji Cantora. Mówi on, że zbiór to każda wielość, której elementy da się powiązać – myślowo – w całość. Definicja ta obejmuje, moim zdaniem, dwa odrębne pojęcia, dobrze znane w informatyce. Pierwszym jest zwykłe pojęcie zbioru dystrybutywnego, o którym mówiliśmy dotychczas. Zbiór taki, o ile jest niezbyt liczny, możemy zapisać, wymieniając jego elementy w specjalnych nawiasach, np. $\{1, 2, 3, 5\}$, przy czym kolejność elementów nie jest istotna.

Drugim jest zbiór z powtórzeniami, zwany krótko torbą (ang. *bag*). Jest to obiekt zawierający elementy pewnego uniwersum i taki, że każdy z tych elementów może do niego należeć wielokrotnie. Torbę zapisujemy podobnie jak zbiór zwykły, np. $\{1, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5\}$. Tu także kolejność elementów nie odgrywa żadnej roli.

Przykładem wykorzystania zbioru z powtórzeniami do modelowania rzeczywistości może być portmonetka zapełniona monetami. Kolejności monet nie da się ustalić i nie ma takiej potrzeby. Można jednak policzyć, ile jest monet każdego nominału, który tam występuje. Dla mojej portmonetki wynik jest następujący: {5 gr, 50 gr, 50 gr, 2 zł, 5 zł, 5 zł}. Czy ten zbiór monet „podpada" pod definicję zbioru Cantora? Z pewnością tak.

4. Zbiór mereologiczny (kolektywny)

Mereologia to nauka o częściach i całościach. Zbiór rozumiany jest tutaj jako całość złożona z części, przy czym część zbioru jest także zbiorem, a *bycie częścią* jest relacją zwrotną, przechodnią i antysymetryczną. Takie pojęcie zbioru wydaje się właściwe w odniesieniu do wszystkiego, co posiada jakąś rozciągłość w przestrzeni. Odcinek czasu, w którym piszę ten tekst, składa się z wielu fragmentów, a każdy z tych fragmentów składa się z godzin czy z kwadransów. Ta godzina, która właśnie trwa, jest częścią wspomnianego odcinka w tym samym znaczeniu co kończący się teraz kwadrans czy ostatnia jego minuta. Jednocześnie minuta ta jest częścią owego kwadransa, częścią tej godziny i częścią całego odcinka, o którym mówimy.

Dla lepszego zrozumienia idei zbioru mereologicznego warto zauważyć, że suma części pewnej całości jest częścią tej całości bez względu na to, czy pojmujemy ją jako stanowiącą jeden spójny fragment przestrzeni, czy dwa oddzielne fragmenty. Na przykład pierwsza i trzecia minuta tej godziny rozważane jako całość są wciąż częścią tej godziny.

Części tak rozumianych całości mogą być dowolnie krótkimi przedziałami czasu (o ile założymy ciągłość czasu). We wszystkich przypadkach tego typu mamy do czynienia z mereologią nieatomową. Mereologia atomowa zakłada istnienie części atomowych, tj. takich, które nie mają już części właściwych.

Częścią silnika mojego samochodu jest gaźnik. Częścią gaźnika jest uszczelka. Uszczelkę tę mogę traktować jako część atomową, tj. część, której nie można już rozłożyć na mniejsze części (nie niszcząc jej). Samochód składa się zatem z części atomowych. Mamy tu również wiele części złożonych (nieatomowych).

Relacja *bycia częścią* jest zwrotna w znaczeniu zawierania się jednego fragmentu przestrzeni w drugim. Mówiąc, że pewna godzina jest częścią jakiegoś odcinka czasu, nie zakładam, że odcinek ten jest większy od godziny. Jeśli byłby on dokładnie tą godziną, stwierdzenie to wciąż byłoby poprawne. Relacja ta jest przechodnia, bo część jakiejś części pewnej całości jest także częścią owej całości. I wreszcie relacja ta jest antysymetryczna: całość nie może być częścią swojej części w żadnym innym przypadku, jak tylko wtedy, gdy są one identyczne.

Oprócz relacji *bycia częścią* wprowadza się relację *bycia częścią właściwą*. Ta ostatnia nie jest, rzecz jasna, ani relacją zwrotną, ani antysymetryczną. Jest natomiast relacją przechodnią i asymetryczną (gdy *a* jest częścią *b*, to *b* nie może być częścią *a*).

Twórca mereologii, polski logik ze szkoły lwowsko-warszawskiej, Stanisław Leśniewski uważał, że mereologiczne pojęcie zbioru jest o wiele bardziej intuicyjne niż pojęcie dystrybutywne. W dodatku, jego zdaniem, definicja Cantora nie stoi w sprzeczności z pojęciem mereologicznym. Z kolei Jan Woleński, znawca prac Leśniewskiego, przypomina, że Cantor ze swej nieformalnej definicji zbioru wyprowadził jednak teorię zbiorów dystrybutywnych ([15], s. 148 i n.). Może więc Leśniewski nie miał racji w sposobie odczytywania definicji Cantora?

Definicja zbioru mereologicznego została sformułowana przez Leśniewskiego w postaci aksjomatycznej. W cytowanej niżej wersji ([9], s. 403 i n.) napisy typu „$a \in b$" czytamy jako „a jest jednym z b" i przyjmujemy wówczas, że a jest przedmiotem-indywiduum; napisy typu „$a \in pr(b)$" czytamy jako „a jest częścią właściwą b"; napisy typu „$a \in a$" czytamy jako „a jest przedmiotem-indywiduum". Aksjomatyka rozpoczyna się od aksjomatu przechodniości i aksjomatu asymetrii:

– $[abc]: a \in pr(b). b \in pr(c) .\supset. a \in pr(c)$

tzn. dla dowolnych a, b, c, jeżeli a jest częścią właściwą b oraz b jest częścią właściwą c, to a jest częścią właściwą c,

– $[ab]: a \in pr(b) .\supset. \sim(b \in pr(a))$

tzn. dla dowolnych a, b, jeżeli a jest częścią właściwą b, to nieprawda, że b jest częścią właściwą a.

Trzeci aksjomat mówi, że jedynie przedmioty-indywidua mają części:

– $[ab]: a \in pr(b) .\supset. b \in b.$

Dalej Leśniewski wprowadza definicje części (*el*) oraz klasy (*Kl*), czyli mereologicznej całości:

– $[ab]: a \in el(b) .\equiv. a \in a: a \in pr(b). \vee .a = b$

tzn. dla dowolnych a, b napis $a \in el(b)$ oznacza, że a jest przedmiotem-indywiduum i a jest częścią właściwą b lub a jest tym samym co b,

– $[ab]: a \in Kl(b) .\equiv. a \in a: [c]: c \in b .\supset. c \in el(a): [d]: d \in el(a) .\supset. (\exists ef). e \in b. f \in el(d). f \in el(e)$

tzn. dla dowolnych a, b napis $a \in Kl(b)$ oznacza, że spełnione są 3 warunki: (1) a jest przedmiotem-indywiduum, (2) dla dowolnego c, jeżeli c jest jednym z b, to c jest częścią a oraz (3) dla dowolnego d, jeżeli d jest częścią a, to istnieją e, f takie, że f jest częścią d i f jest częścią takiego e, które jest jednym z b.

Definicje te wykorzystuje Leśniewski w ostatnich dwóch aksjomatach:

– $[abc]: a \in Kl(c). b \in Kl(c) .\supset. a = b$

tzn. dla dowolnych a, b, c, jeżeli a jest całością złożoną z c oraz b jest całością złożoną z c, to jest to ta sama całość,

– $[ab]: a \in b .\supset. [\exists c]. c \in Kl(b)$

tzn. dla dowolnych a, b, jeżeli a jest jednym z b, to istnieje c będące całością złożoną z b.

Aby otrzymać mereologię atomową, należy jeszcze dodać definicję atomu (*atm*):

– $[b]: b \in atm . \equiv . [c]: c \in el(b) . \supset . c = b$

i aksjomat:

– $[a]: a \in a . \supset . [\exists b]. b \in el(a). b \in atm.$

Atomowość mereologii nie wpływa na kwestię skończoności. Atomami czasu mogą być sekundy, a zbiorem w przestrzeni czasu może być cała nieskończona wieczność.

Zbiory mereologiczne zostały na nowo odkryte przy okazji prac nad zbiorami przybliżonymi, o których będzie nieco dalej.

5. Torba kolektywna?

Czy można utworzyć zbiór mereologiczny z powtórzeniami?

Powróćmy do przykładu z samochodem jako całością mereologiczną. Każde z czterech kół mojego samochodu jest jego częścią. Wszystkie te koła, rozważane jako całość, są także częścią samochodu. Nie mamy tu więc do czynienia z powtórzeniami, ale z czterema różnymi przedmiotami.

Odpowiedź jest, moim zdaniem, negatywna.

6. Funkcja charakterystyczna

Każdy zbiór dystrybutywny A (bez powtórzeń) na danym uniwersum U można scharakteryzować funkcją, której dziedziną jest U i która przyjmuje wartość 1 dla każdego elementu uniwersum należącego do A, wartość zaś 0 dla każdego elementu, który nie należy do A. Funkcję tę nazywa się funkcją charakterystyczną zbioru A.

Dla zbiorów dystrybutywnych z powtórzeniami możemy zaproponować podobną funkcję. Jej przeciwdziedziną będzie teraz zbiór liczb naturalnych. Dla każdego elementu uniwersum, który nie należy do danej torby, funkcja ta przyjmie wartość 0. Dla każdego zaś elementu, który należy do torby n razy, funkcja przyjmie wartość n.

Struktura danych używana do reprezentowania zbioru dystrybutywnego to zwykłe ciąg bitów odpowiadający funkcji charakterystycznej tego zbioru. Jedynka w ciągu reprezentującym zbiór oznacza należenie elementu do zbioru, zero oznacza nienależenie. Przy takiej reprezentacji ciąg bitów odpowiada wszystkim elementom uniwersum ustawionym kolejno jeden za drugim, a zatem uniwersum ma być skończone, niezbyt duże i uporządkowane! To spore ograniczenia.

Torbę możemy w podobny sposób reprezentować ciągiem liczb, z których każda odpowiada za liczbę wystąpień tego elementu, który określa pozycja liczby w ciągu. Poprzednie uwagi o uniwersum pozostają w mocy.

7. Zbiór rozmyty

Lotfi Zadeh nadaje pojęciom *zbioru* i *należenia elementu do zbioru* nowe znaczenia. Zbiorem rozmytym (ang. *fuzzy set*) nazywa on obiekt obejmujący elementy pewnej przestrzeni rozważań, przy czym każdy z tych elementów może w pełni należeć do owego zbioru rozmytego, wcale do niego nie należeć albo *należeć w pewnym stopniu*. Zadeh proponuje więc, by nie było ostrej granicy między elementami należącymi i nienależącymi do zbioru rozmytego.

Zadeh w 1965 roku definiuje zbiór rozmyty ([16], s. 339): „Let X be a space of points (objects). A fuzzy set (class) A in X is characterized by a membership (characteristic) function $f_A(x)$ which associates with each point in X a real number in the interval [0, 1], with the value of $f_A(x)$ at x representing the »grade of membership« of x in A".

W późniejszych pracach Zadeh i inni autorzy [7, 2, 14] definiują zbiór rozmyty jako zbiór scharakteryzowany za pomocą równości:

$$A = \{(x, \mu_A(x)): x \in X, \mu_A(x) \in [0,1]\},$$

gdzie $\mu_A: X \to [0,1]$ jest funkcją przynależności (ang. *membership function*) elementów z X do zbioru rozmytego A.

Ten sposób definiowania musi budzić sprzeciw (por. [8], s. 12 i n.). Prawa strona równości to zbiór par, z których każda składa się z elementu uniwersum i liczby będącej wartością funkcji μ_A obliczoną dla tego elementu. Zbiór takich par to właśnie funkcja μ_A, czyli funkcja idąca z uniwersum X w przedział rzeczywisty [0,1]. Czyżby więc A stojące po lewej stronie równości było identyczne z μ_A? A może znak równości należy rozumieć inaczej niż zwykle? Definicja ta stanowi pewien skrót myślowy, który został ostatecznie zaakceptowany przez środowisko uczonych i jest wielokrotnie powtarzany w literaturze przedmiotu.

Inną definicję zbioru rozmytego znajdziemy u Józefa Drewniaka ([3], s. 66–67). Jej istota polega na odróżnieniu zbioru rozmytego od jego funkcji przynależności i zarazem związaniu zbioru z jego funkcją przynależności.

Niech X będzie obszarem odniesienia (*universe of discourse*) pojmowanym w sensie dystrybutywnym: niepustym, skończonym lub nie. Niech *Mi(X)* będzie ogółem wszystkich funkcji:

$$\mu: X \to [0,1],$$

zwanych funkcjami przynależności. Według Drewniaka elementy niepustego zbioru *F(X)* nazywamy zbiorami rozmytymi na uniwersum X, jeśli tylko dane jest odwzorowanie przyporządkowujące tym elementom ich funkcje przynależności z *Mi(X)*. Definicja Drewniaka nie mówi więc, czym są zbiory rozmyte, jaka jest natura elementów zbioru *F(X)*. Być może jest to zbiór krzeseł. W każdym przypadku nazwiemy je zbiorami rozmytymi, o ile tylko każdemu elementowi *F(X)* przypiszemy jakąś funkcję z *Mi(X)*.

Mimo tych krytycznych uwag oczywiste jest, że funkcja przynależności stanowi uogólnienie funkcji charakterystycznej, zbiór rozmyty zaś uogólnienie zbioru zwykłego (dystrybutywnego).

Moja propozycja ([8], s. 12) definicji zbioru rozmytego nawiązuje do definicji zbioru dystrybutywnego Cantora, którą cytowałem wcześniej. Zbiorem rozmytym nazywam każdy ogół elementów pewnego niepustego uniwersum, które można myślowo powiązać w całość za pomocą jakiejś ich WŁASNOŚCI.

Własność elementu może być ostra bądź nieostra. W pierwszym przypadku zbiór rozmyty jest identyczny z pewnym zbiorem dystrybutywnym (zbiorem w sensie Cantora), w drugim przypadku zbiór rozmyty jest wytworem myśli (czy też, jak chcą inni, realnością od myśli niezależną) istotnie różnym od zbioru dystrybutywnego (jest zbiorem w rozumieniu Zadeha).

Przykładem własności ostrej na uniwersum zegarków jest własność, że zegarek został wyprodukowany w Szwajcarii. Każdy rozważany zegarek albo ma tę własność i należy do zbioru zegarków szwajcarskich, albo jej nie ma. Przykładem własności nieostrej jest wysoka cena zegarka. Każdy zegarek może mieć wtedy przypisaną wartość odpowiedniej funkcji przynależności: stopień, w jakim wspomniana własność mu przysługuje. Każdy zegarek należy w jakimś stopniu do rozmytego zbioru zegarków drogich, nawet gdy ten stopień równy jest zero. W tym ostatnim przypadku stwierdzenie, że element należy do zbioru w stopniu zerowym, jest równoznaczne stwierdzeniu, że wcale nie należy do tego zbioru.

W przypadku większości zbiorów rozmytych trafne przypisanie ich elementom stopni przynależności wydaje się bardzo trudne. W zastosowaniach praktycznych, dla których ta teoria przecież powstała, radzimy sobie z tym zadaniem stosunkowo łatwo. Po pierwsze, funkcja przynależności ma przede wszystkim uporządkować elementy zbioru rozmytego: jeżeli weźmiemy dwa zegarki o różnych cenach, to stopień przynależności tańszego z nich do zbioru zegarków drogich nie może być większy niż stopień przynależności tego droższego. Po drugie, funkcja przynależności powinna być regularna (na całej dziedzinie wznosząca się, opadająca, najpierw wznosząca się, a następnie opadająca, czy wreszcie odwrotnie: najpierw opadająca, a potem wznosząca się). Po trzecie, w większości zastosowań można ograniczyć się do kilku klas funkcji regularnych (przykładem takiej klasy są funkcje dzwonowe Gaussa). Po czwarte, możemy zaufać ekspertowi, który wskaże odpowiednią funkcję. Po piąte, możemy wykonać badania statystyczne dotyczące znaczenia interesującej nas nieostrej własności elementów ustalonego uniwersum w tym środowisku, którego opinia nas interesuje. I po szóste, możemy wyekstrahować kształty tych funkcji z jakiegoś zbioru danych.

8. Zbiór rozmyty typu 2

Częściowym rozwiązaniem problemu z precyzyjnym określaniem stopni przynależności jest rozszerzenie pojęcia zbioru rozmytego polegające na tym, by wartościami funkcji przynależności zamiast konkretnych liczb rzeczywistych były zbiory rozmyte określone na [0,1]. Obiekty takie nazywa się zbiorami rozmytymi typu 2 [10].

Funkcja przynależności zbioru rozmytego *A typu 2* określonego na uniwersum *X* przypisuje elementom tego uniwersum zbiory rozmyte na [0,1]:

$$\mu_A : X \to \mathrm{F}([0,1]);\ \mu_A(x) = \int_{u \in [0,1]} f(u)\,|\,u\text{, gdzie } f\colon [0,1] \to [0,1].$$

Funkcje przynależności tych zbiorów nazywamy rozmytymi funkcjami przynależności, a wartości tych funkcji – rozmytymi stopniami przynależności. W sposób rekurencyjny wprowadza się zbiory rozmyte wyższych typów: zbiór rozmyty na X jest typu m (ang. *type-m fuzzy set*), gdy wartościami jego funkcji przynależności są zbiory rozmyte typu m–1.

9. Zbiór rozmyty poziomu 2

Innego rodzaju rozszerzeniem pojęcia zbioru rozmytego są zbiory rozmyte poziomu m (ang. *level-m fuzzy set*). Zbiorem rozmytym poziomu 2 nazywamy zbiór rozmyty, którego elementami są zbiory rozmyte, tzn. zbiór rozmyty określony na uniwersum $F(X)$ zbiorów rozmytych określonych na ostrym uniwersum X. Zbiory rozmyte poziomu m wprowadza się rekurencyjnie.

10. Zbiór L-rozmyty

W niektórych zastosowaniach praktycznych wygodnie jest zamienić zbiór wartości funkcji przynależności. Zadeh jako przykład proponuje zbiór częściowo uporządkowany. J.A. Goguen zaleca zbiór L o strukturze kraty i stąd nazwa „L-rozmyte". Proponuje się także dowolne zbiory nieujemnych liczb rzeczywistych oraz inne zbiory.

11. Zbiór podwójnie rozmyty

Inną ciekawą propozycją jest pojęcie zbioru, który nazwałbym zbiorem podwójnie rozmytym (w oryginale: *bifuzzy set*), a które rozwijają za Atanassovem T. Gerstenkorn i J. Mańko (por. [1], [4]). Zbiorem podwójnie rozmytym na uniwersum X nazywają oni obiekt postaci:

$$A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)): x \in X\},$$

gdzie μ_A, ν_A: $X \to [0,1]$ spełniają dla wszystkich $x \in X$ warunek

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1.$$

Wartości funkcji przynależności μ_A i funkcji nieprzynależności ν_A danego zbioru podwójnie rozmytego A w punkcie $x \in X$ nazywamy odpowiednio stopniem przynależności i stopniem nieprzynależności tegoż elementu x do zbioru podwójnie rozmytego A.

12. Zbiór dobrze rozmyty

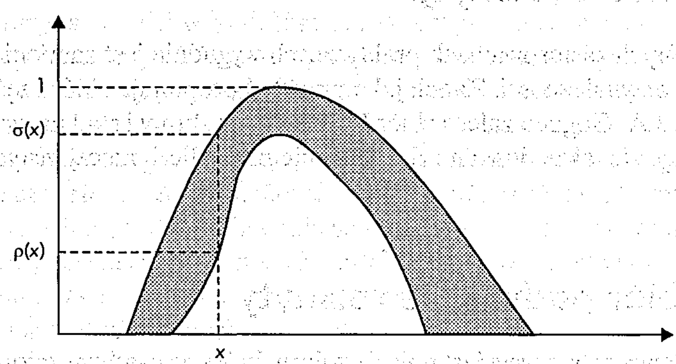
Kolejnym rodzajem zbioru jest obiekt, który proponuję nazywać zbiorem dobrze rozmytym.

Skoro określenie stopni przynależności zbioru rozmytego nie jest łatwe, to może łatwiejsze będzie wskazanie dla każdego elementu uniwersum – przedziału, do którego należy taki stopień. Innymi słowy o każdym elemencie uniwersum będziemy mogli stwierdzić, że jego stopień przynależności jest nie mniejszy od liczby ρ i zarazem nie większy od liczby σ. Będziemy oczywiście żądać, aby $0 \leq \rho \leq \sigma \leq 1$.

Niech X będzie obszarem odniesienia pojmowanym w sensie dystrybutywnym: niepustym, skończonym lub nie. Niech *Ro(X)* będzie ogółem funkcji $\rho : X \to [0,1]$, *Sigma(X)* zaś – ogółem funkcji $\sigma : X \to [0,1]$ zwanych odpowiednio dolnymi (pesymistycznymi) i górnymi (optymistycznymi) funkcjami przynależności.

W sposób uproszczony zbiór dobrze rozmyty zdefiniujemy za pomocą równości:

$$A = \{(x, \rho_A(x), \sigma_A(x)) : x \in X, \rho_A \in Ro(X), \sigma_A \in Sigma(X), 0 \leq \rho(x) \leq \sigma(x) \leq 1\}.$$



Rysunek 1. Zbiór dobrze rozmyty

Zbiór dobrze rozmyty (por. rys. 1) może być reprezentowany dwoma zbiorami rozmytymi w rozumieniu Zadeha, które należałoby wówczas nazywać odpowiednio zbiorem rozmytym dolnym i zbiorem górnym.

Zbiór dobrze rozmyty może być rozumiany jako *bifuzzy*, ponieważ $\rho(x) + (1 - \sigma(x)) \leq 1$, a zatem funkcję $\rho(x)$ i dopełnienie funkcji $\sigma(x)$ do liczby 1 można uważać odpowiednio za funkcje przynależności i nieprzynależności zbioru *bifuzzy*. Formalnie zbiór dobrze rozmyty i zbiór *bifuzzy* to te same obiekty, intuicje z nimi związane są jednak inne.

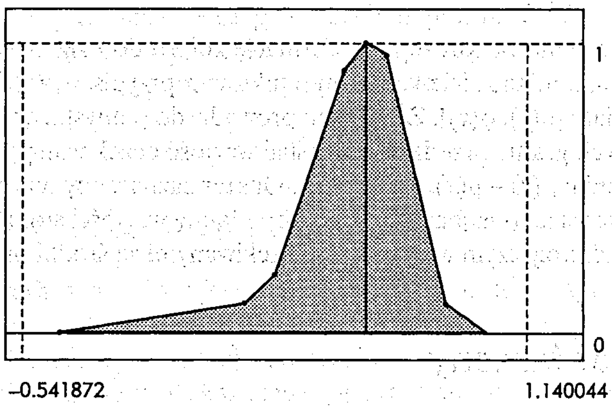
Można zaproponować prostą transformację zbioru dobrze rozmytego w zbiór rozmyty Zadeha, a mianowicie każdemu punktowi x przypisać $\mu(x)$ jako środkową wartość przedziału $[\rho(x), \sigma(x)]$. Zabieg ten prowadzi do pomysłu, aby zamiast określania powyższych granic przedziału określać wartość oczekiwaną $\mu(x)$ oraz dolne i górne odchylenia: $\mu(x) - \rho(x)$, $\sigma(x) - \mu(x)$. Obszar zaznaczony na rysunku 1 interpretujemy wówczas jako najbardziej prawdopodobne wartości stopni przynależności x do zbioru A, przy czym wartościami oczekiwanymi są środki przedziałów.

13. Zbiór łamany

Reprezentacja zbioru rozmytego w pamięci komputera jest łatwa, gdy ograniczymy się do kilku klas funkcji regularnych. Jednak operacje wykonywane na tych funkcjach szybko wyprowadzają nas poza te klasy i wtedy zaczynają się trudności. Jednym z możliwych rozwiązań jest zastępowanie każdej funkcji otrzymanej w wyniku obliczeń i nienależącej do wybranych klas – najbliższą funkcją należącą do tych klas. Jak łatwo się przekonać, rozwiązanie takie zwykle się nie sprawdza. Wystarczy bowiem, że w wyniku operacji na funkcjach regularnych (np. o kształcie wzgórza) otrzymamy funkcję nieregularną (np. o kształcie dwóch pagórków oddzielonych głęboką doliną). Przybliżenie jej funkcją regularną nie ma wówczas sensu, bo w znacznym stopniu zaciera sens operacji wykonanej na tamtych funkcjach.

Rozwiązaniem zdecydowanie częściej używanym jest stosowanie funkcji o kształcie łamanej i przybliżanie każdej funkcji powstającej w wyniku jakichś operacji kolejną funkcją łamaną. Aproksymacja taka może być bardzo dokładna. Jeżeli zaś nie zależy nam na wielkiej dokładności, to możemy łamane o licznych odcinkach zastępować prostszymi.

Funkcje łamane stosujemy także wtedy, gdy powierzamy użytkownikowi programu ustalenie ostatecznego kształtu funkcji uzyskanej w wyniku jakiegoś procesu obliczeniowego. Jako przykład takiego rozwiązania rozważmy programy *ClusterIt* oraz *fuzzyShape* autorstwa mojego magistranta [5]. Pierwszy z nich dokonuje rozmytej klasteryzacji danych numerycznych przy użyciu zmodyfikowanej metody Gustafsona-Kessela. Drugi jest edytorem, za pomocą którego użytkownik obrysowuje kształty rozmytych klasterów funkcjami łamanymi w celu uzyskania funkcji o kształtach nadających się na reprezentacje termów lingwistycznej bazy wiedzy projektowanego sterownika. Omawiany program generuje skrypt opisujący łamaną narysowaną przez użytkownika i włącza go do skryptu definiującego sterownik. Rysunek 2 przedstawia przykład łamanej narysowanej przy użyciu *fuzzyShape*. Łamana ta stanowi – zdaniem użytkownika, który ją narysował – aproksymację funkcji przynależności rozmytego klastera otrzymanego z programu *ClusterIt*.



Rysunek 2. Rozmyty klaster i funkcja łamana

Zbiory rozmyte o funkcjach przynależności w postaci łamanej proponuję nazywać zbiorami rozmytymi łamanymi. Dla takich zbiorów warto na nowo określić standardowe operacje na zbiorach rozmytych używane w danej metodzie obliczeniowej, co pozwoli – w niemal każdym przypadku – na znaczne uproszczenie obliczeń.

14. Zbiór przybliżony

Twórcą omawianej niżej teorii jest Zdzisław Pawlak [12], [13]. Aby wprowadzić definicję zbioru przybliżonego (ang. *rough set*), trzeba rozpocząć od pojęcia systemu informacyjnego. Przez system taki rozumiemy czwórkę $<U, A, V, i>$, gdzie U jest niepustym i skończonym uniwersum, A jest niepustym i skończonym zbiorem atrybutów, V jest sumą dziedzin V_a atrybutów, a i jest funkcją informacji, która przypisuje każdemu obiektowi u z uniwersum U i każdemu atrybutowi a z A wartość $i(x,a)$ wybraną z dziedziny V_a tego atrybutu.

Obiekty nierozróżnialne z uwagi na wartości wybranych atrybutów tworzą klasy równoważności. Tak więc charakterystyka dana poprzez różne zestawy wartości ustalonych atrybutów dzieli uniwersum na klasy elementów nierozróżnialnych. Tym samym dla każdego zestawu atrybutów uniwersum zostaje podzielone na części w sposób zupełny i rozłączny. Im więcej atrybutów weźmiemy pod uwagę, tym podział może okazać się dokładniejszy. Sztuką jest wybranie tych atrybutów, dla których podział jest i dokładny, i pożądany z uwagi na cele, jakie chcemy osiągnąć.

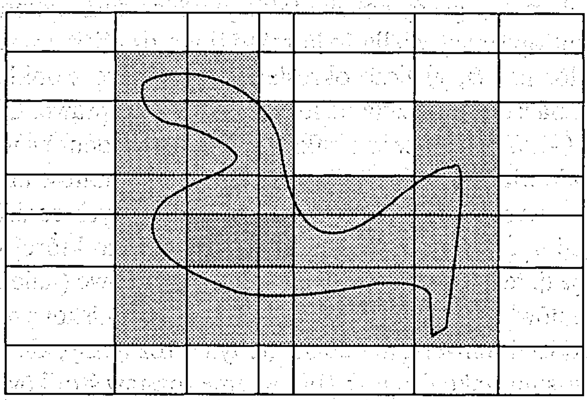
Jako przykład rozważmy uniwersum okularów korekcyjnych, które noszą studenci tej szkoły. Pierwszy, gruby podział takiego uniwersum wykonam, gdy wezmę pod uwagę atrybut opisujący wielkość korekty. Jako dziedzinę wartości tego atrybutu przyjmę zbiór par (x, y) liczb określających korektę z dokładnością do 0.5 dioptrii, gdzie liczba x dotyczy szkła na lewe oko, a y – na prawe. Ustalając wartość tego atrybutu na (–1.5, + 2.0), ze wszystkich okularów studentów wybiorę te i tylko te, które mają takie właśnie szkła. Podział uniwersum okularów na podstawie wartości tego atrybutu wyróżni kilkaset (około 400) rozłącznych części. Dla porządku dodam jeszcze jedną część oznaczaną wartością (0, 0), do której włożę wszystkie pozostałe okulary, tj. te, których szkła nie są jednoogniskowe (należeć tu będą okulary ze szkłami połówkowymi, dwupołówkowymi, dwuogniskowymi, progresywnymi *etc.*). Teraz podział uniwersum będzie nie tylko rozłączny, ale również wyczerpujący całe uniwersum. Jako drugi atrybut wezmę rozstaw środków krzywizn szkieł zmierzony w każdej oprawie z dokładnością do 1 milimetra. W tym przypadku uniwersum okularów zostanie podzielone na kilkadziesiąt (około 25) rozłącznych części w ten sposób, że do danej części należeć będą te i tylko te okulary, które mają ten sam rozstaw. Okulary, których nie da się scharakteryzować w taki sposób (np. o szkłach progresywnych), wrzucę do dodatkowej części oznaczonej rozstawem 0. Jeżeli wezmę pod uwagę oba omówione atrybuty, to uniwersum zostanie podzielone znacznie dokładniej (na około 10 000 części). Dzieje się tak dlatego, że podziały te się skrzyżują. Wprowadzając kolejne atrybuty, mogę dzielić uniwersum okularów coraz dokładniej.

Zestaw wartości wybranych atrybutów jest informacją, która w sposób unikatowy charakteryzuje każdą część podziału uniwersum dokonanego przez skrzyżowanie podziałów odnoszących się do każdego z tych atrybutów z osobna.

Zwykły zbiór dystrybutywny utworzony z elementów uniwersum systemu informacyjnego może być przybliżony zbiorem będącym sumą części jakiegoś podziału tego uniwersum (podziału dokonanego z uwagi na wybrane atrybuty). Przybliżenie to może być przybliżeniem dolnym (wszystkie części przybliżenia zawierają się w omawianym zbiorze) lub górnym (omawiany zbiór zawiera się w sumie części stanowiących to przybliżenie), jak na rysunku 3. Im podział uniwersum jest dokładniejszy, tym przybliżenia mogą być lepsze.

Pomysł Pawlaka polega na tym, by odróżnić zbiory dokładne, tj. te, które da się przedstawić jako sumę części uniwersum, od zbiorów, których nie da się tak przedstawić. Te drugie nazywa on zbiorami przybliżonymi.

W ramach danego systemu informacyjnego zbiór przybliżony rozpatrywany jest jako obiekt, który leży gdzieś między swoim dolnym i górnym przybliżeniem. Każda z tych granic odpowiada sumie części podziału określonego wybranym zestawem atrybutów. Suma ta, rozumiana jako całość, odpowiada z kolei pewnej informacji (zestawowi wartości tychże atrybutów). Zbiór przybliżony określony jest zatem dwoma informacjami.



Rysunek 3. Zbiór przybliżony i jego dwa przybliżenia

Powyższe uwagi, a zwłaszcza użyte określenia „część" i „całość" mogą sugerować, że istnieje jakiś związek między zbiorami przybliżonymi, a zbiorami mereologicznymi. Istotnie, te ostatnie stanowią podstawę teorii zbiorów przybliżonych.

Zbiory przybliżone są wykorzystywane w informatyce głównie w metodach analizy dużych zbiorów danych (zob. http://logic.mimuw.edu.pl/~rses) i w metodach sterowania przybliżonego (por. [11]).

Bibliografia

[1] Atanassov K., *Intuitionistic fuzzy sets*, „Fuzzy Sets and Systems" 1986, vol. 20, s. 87–96.

[2] Czogała E., Pedrycz W., *Elementy i metody teorii zbiorów rozmytych*, Warszawa 1985.

[3] Drewniak J., *Podstawy teorii zbiorów rozmytych*, Katowice 1984.

[4] Gerstenkorn T., Mańko J., *Randomness in the bifuzzy set theory*, „International Journal of Computing Anticipatory Systems", vol. 7, s. 89–97.

[5] Głowaty G., *Modelowanie rozmyte. Zagadnienia klasteryzacji i środowisko programistyczne*, Kraków 2003 [maszynopis pracy magisterskiej].

[6] Kacprzyk J., *Zbiory rozmyte w analizie* systemowej, Warszawa 1986.

[7] Lin C.-T., Lee C.S.G., *Neural fuzzy systems. A neuro-fuzzy synergism to intelligent systems*, New York 1996.

[8] Łachwa A., *Rozmyty świat zbiorów, liczb, relacji, faktów, reguł i decyzji*, Warszawa 2001.

[9] Marciszewski W. (red.), *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki*, Warszawa 1987.
[10] Mizumoto M., Tanaka K., *Some properties of fuzzy sets of type 2*, „Information and Control" 1976, vol. 31, s. 312–340.
[11] Mrózek A., Płonka L., *Analiza danych metodą zbiorów przybliżonych: zastosowanie w ekonomii, medycynie i sterowaniu*, Warszawa 1999.
[12] Pawlak Z., *Systemy informacyjne. Podstawy teoretyczne*, Warszawa 1983.
[13] Pawlak Z., *Rough sets*, „Fuzzy Sets and Systems" 1985, vol. 17, s. 99–102.
[14] Tanaka K., *An introduction to fuzzy logic for practical applications*, New York 1997.
[15] Woleński J., *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, Warszawa 1985.
[16] Zadeh L.A., *Fuzzy sets*, „Information and Control" 1965, vol. 8, s. 338–353.
[17] http://logic.mimuw.edu.pl/~rses.