F O L I A   O E C O N O M I C A   C R A C O V I E N S I A
Vol. XLVIII (2007)   PL ISSN 0071-674X

KONSTRUKCJA PORTFELI EFEKTYWNYCH Z ZASTOSOWANIEM WIELORÓWNANIOWYCH MODELI GARCH[1]

PIOTR FISZEDER
Katedra Ekonometrii i Statystyki WNEiZ
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
PL 87-100 Toruń, ul. Gagarina 13a
e-mail: piter@uni.torun.pl

Praca przedstawiona na posiedzeniu Komisji Nauk Ekonomicznych PAN w dniu 7 listopada 2006 r.

ABSTRACT

Piotr Fiszeder, *Construction of Efficient Portfolios with Application of Multivariate GARCH Models*, Folia Oeconomica Cracoviensia 2007, 48: 47–68.

The purpose of this paper is to present dynamic approach to selection of efficient portfolios using a forecasts of variances and covariances from the multivariate GARCH models. Evaluation of efficiency for different methods of asset allocation is also performed for stocks from the WSE. Twelve specifications of the multivariate GARCH models, the univariate GARCH model and six other covariance matrix estimation methods are used. Taking into consideration time varying variances and covariances of stock returns in portfolio selections increases, with some exceptions, efficiency of asset allocation process. Simple specifications of the multivariateGARCH models, which parameters are estimated in one stage, are the best performing models. From economic point of view, the differences between the models are not significant, with exception of the factor and orthogonal models. RiskMetrics methodology commonly used by practitioners does not give good results for constructions of efficient portfolios.

SŁOWA KLUCZOWE — KEY WORDS

multivariate GARCH models, portfolio selection, efficient portfolios
wielorównaniowe modele GARCH, konstrukcja portfela, porfele efektywne

[1] Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2005–2007, projekt badawczy nr 1-H02B-033-29.

1. WPROWADZENIE

Przy wyznaczaniu portfeli efektywnych dużą rolę odgrywa wybór estymatorów wartości oczekiwanej, wariancji i kowariancji stóp zwrotu oraz ściśle z tym związany wybór metod prognozowania wartości oczekiwanej, wariancji i kowariancji stóp zwrotu. Proces budowy portfela według kryteriów zaproponowanych przez Markowitza jest bardzo wrażliwy na wybór estymatora wartości oczekiwanej stopy zwrotu. Niewielkie różnice w szacunkach wartości oczekiwanych stóp zwrotu często prowadzą do znaczącej przebudowy portfela. Wybór estymatorów wariancji i kowariancji ma również istotny wpływ na alokację aktywów. Tradycyjnie stosowane estymatory wartości oczekiwanej, wariancji i kowariancji stopy zwrotu, czyli średnia arytmetyczna, wariancja i kowariancja obliczane na podstawie dostępnych danych historycznych, nie dają najlepszych wyników przy wyznaczaniu portfeli efektywnych.

W artykule zaprezentowano dynamiczne podejście do wyznaczania portfeli efektywnych, wykorzystujące prognozy wariancji i kowariancji stóp zwrotu skonstruowane na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH. Istnieje bardzo obszerna literatura dotycząca zmienności wariancji warunkowej procesów finansowych. Okazuje się jednakże, że zmieniają się nie tylko warunkowe wariancje, ale również warunkowe kowariancje, jak i warunkowe współczynniki korelacji pomiędzy procesami finansowymi. Wielorównaniowy proces GARCH pozwala opisać zarówno zmieniające się w czasie warunkowe wariancje, jak i zmieniające się warunkowe kowariancje stóp zwrotu. Jeżeli wariancje i kowariancje stóp zwrotu nie są stałe w czasie, to prognozy uzyskane na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH powinny przynieść dodatkowe korzyści przy wyznaczaniu portfeli efektywnych. Literatura dotycząca wykorzystania modeli GARCH przy budowie portfeli jest uboga. Wyniki tych analiz z uwagi na złożoność problemu są na razie fragmentaryczne. Głównym celem zaprezentowanych badań jest ocena skuteczności różnych metod tworzenia portfeli, w tym przede wszystkim z wykorzystaniem różnych specyfikacji wielorównaniowych modeli GARCH. Przedstawione podejścia do tworzenia portfela różnią się wyłącznie metodą prognozowania macierzy kowariancji stóp zwrotu.

Układ artykułu jest następujący. W części drugiej przedstawiono sposób konstrukcji portfeli efektywnych. W części trzeciej zaprezentowano stosowane w badaniu metody estymacji macierzy kowariancji. Część czwarta zawiera analizę skuteczności konstrukcji portfeli efektywnych dla trzech spółek giełdowych. W części piątej badanie zostało rozszerzone na dwadzieścia spółek. Część szósta zawiera podsumowanie.

2. DYNAMICZNY PROCES BUDOWY PORTFELA

Proces budowy portfela według kryteriów zaproponowanych przez Markowitza jest bardzo wrażliwy na wybór estymatora wartości oczekiwanej stóp zwrotu. Konstruując portfel efektywny trudno jest odróżnić wpływ wyboru estymatora macierzy kowariancji od wyboru estymatora wartości oczekiwanej. Jednym ze sposobów na wyeliminowanie wpływu wyboru estymatora wartości oczekiwanej jest konstrukcja portfela o minimalnej wariancji. Udziały poszczególnych aktywów w portfelu o minimalnej wariancji zależą wyłącznie od macierzy kowariancji. Dynamiczny proces budowy portfela został przedstawiony najpierw dla portfela o minimalnej wariancji, jednakże — jak zostało pokazane dalej — cała procedura może być łatwo rozszerzona na wyznaczanie dowolnych portfeli efektywnych.

Dla danego t na podstawie dostępnych danych z okresu $\langle 1, t\rangle$ estymowane są parametry modelu GARCH[2]. Na podstawie oszacowanego modelu konstruowana jest prognoza macierzy kowariancji stóp zwrotu dla okresu $t + \tau$, gdzie τ oznacza horyzont prognozy. Wyznaczoną prognozę wykorzystuje się do konstrukcji portfela efektywnego. Niech $W'_{t+\tau} = (w_{1t+\tau}, w_{2t+\tau}, \ldots, w_{Nt+\tau})$, gdzie $w_{it+\tau}$ oznacza udział i-tego aktywu w portfelu dla okresu $t + \tau$, $H_{t+\tau}$ to prognoza warunkowej macierzy kowariancji dla okresu $t + \tau$. Wariancja portfela jest wówczas równa $W'_{t+\tau} H_{t+\tau} W_{t+\tau}$. Aby wyznaczyć portfel o minimalnej wariancji (minimum globalne), wystarczy rozwiązać następujące zadanie programowania kwadratowego:

$$W'_{t+\tau} H_{t+\tau} W_{t+\tau} \to \min, \tag{1}$$

przy warunkach:

$$W'_{t+\tau} I = 1, \tag{2}$$

gdzie I jest kolumnowym wektorem o N składowych, przy czym każda z nich równa jest jedności.

Jeżeli nie występuje krótka sprzedaż, to należy dodatkowo wprowadzić warunki brzegowe:

$$w_{it+\tau} \geq 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, N. \tag{3}$$

Całą procedurę powtarza się następnie dla kolejnych okresów (w miarę napływu kolejnych danych).

[2] Jeżeli warunkowe wartości oczekiwane stóp zwrotu są różne od zera, to należy również estymować parametry w równaniach dla warunkowych średnich.

Jeżeli dopuszcza się krótką sprzedaż, to udziały aktywów w portfelu o minimalnej wariancji dla okresu $t + \tau$ określone są za pomocą wzoru:

$$W_{t+\tau} = \frac{1}{C_{t+\tau}} H_{t+\tau}^{-1} l, \tag{4}$$

gdzie $C_{t+\tau} = l' H_{t+\tau}^{-1} l$.
Wariancja portfela o minimalnej wariancji jest wówczas równa $V_{t+\tau} = 1/C_{t+\tau}$.

Inne portfele efektywne można wyznaczyć poprzez znalezienie portfeli o minimalnej wariancji przy zadanym minimalnym poziomie oczekiwanej stopy zwrotu. Należy w tym przypadku znaleźć rozwiązanie spełniające następujące warunki:

$$W'_{t+\tau} H_{t+\tau} W_{t+\tau} \to \min, \ W'_{t+\tau} l = 1 \quad \text{oraz} \quad W'_{t+\tau} r_{t+\tau} = \mu, \tag{5}$$

gdzie $r_{t+\tau}$ jest to wektor oczekiwanych stóp zwrotu dla okresu $t + \tau$ o wymiarach $N \times 1$, μ to przyjęta minimalna oczekiwana stopa zwrotu portfela.

Jeżeli występuje krótka sprzedaż, to udziały aktywów w portfelu dla okresu $t + \tau$ określone są za pomocą wzoru[3]:

$$W_{t+\tau} = g_{t+\tau} + h_{t+\tau} \mu, \tag{6}$$

gdzie $g_{t+\tau} = \frac{1}{D_{t+\tau}} \left[B_{t+\tau} (H_{t+\tau}^{-1} l) - A_{t+\tau} (H_{t+\tau}^{-1} r_{t+\tau}) \right]$, $h_{t+\tau} = \frac{1}{D_{t+\tau}} \left[C_{t+\tau} (H_{t+\tau}^{-1} r_{t+\tau}) - A_{t+\tau} (H_{t+\tau}^{-1} l) \right]$,
$A_{t+\tau} = l' H_{t+\tau}^{-1} r_{t+\tau}$, $B_{t+\tau} = r'_{t+\tau} H_{t+\tau}^{-1} r_{t+\tau}$, $D_{t+\tau} = B_{t+\tau} C_{t+\tau} - A_{t+\tau}^2$.

Za oczekiwane stopy zwrotu dla okresu $t + \tau$ przyjmuje się prognozy skonstruowane na podstawie modeli dla warunkowych średnich.

3. SPECYFIKACJE WIELORÓWNANIOWYCH MODELI GARCH

W badaniu zastosowano dwanaście specyfikacji wielorównaniowego modelu GARCH: model BEKK z warunkowym rozkładem normalnym, model BEKK z warunkowym rozkładem *t*-Studenta, diagonalną i skalarną postać modelu BEKK, model skalarno-diagonalny, model zintegrowany, model stałych warunkowych współczynników korelacji, *K*-czynnikowy model, model ortogonalny dla dwóch i trzech czynników, model DCC oraz zintegrowany model DCC. Dodatkowo wykorzystano również jednorównaniowy model GARCH. Wyniki uzyskane dla modeli GARCH porównano z wynikami dla sześciu innych metod:

---

[3] Zob. Campbell, Lo i MacKinlay (1997).

równe udziały dla wszystkich aktywów, bezwarunkowa macierz kowariancji stóp zwrotu, ruchoma macierz kowariancji, ruchoma macierz kowariancji ze stałą wygładzania równą 25, model wyrównywania wykładniczego dla macierzy kowariancji oraz model wyrównywania wykładniczego dla macierzy kowariancji z parametrem wygasania równym 0,94 (tzw. model RiskMetrics). Poniżej podano tylko podstawowe informacje dotyczące stosowanych modeli wielorównaniowych. Więcej informacji na temat własności i metod estymacji można znaleźć na przykład w pracy Bauwens, Laurent i Rombouts (2006).

Estymacja parametrów ogólnej postaci wielorównaniowego modelu GARCH, zwanej postacią VECH, jest trudna już nawet dla kilku aktywów. Z tego względu w badaniu zastosowano prostsze specyfikacje wielorównaniowego modelu GARCH. Rozważano tylko specyfikacje zapewniające dodatnią określoność macierzy kowariancji. Baba i wsp. (1990) przedstawili następującą postać modelu nazywaną modelem BEKK (p,q)[4] (Engle i Kroner, 1995):

$$\varepsilon_t \mid \psi_{t-1} \sim D(0, H_t), \tag{7}$$

$$H_t = CC' + \sum_{i=1}^{q} D_i \varepsilon_{t-i} \varepsilon'_{t-i} D'_i + \sum_{j=1}^{p} E_j H_{t-j} E'_j, \tag{8}$$

gdzie ψ_{t-1} oznacza zbiór wszystkich informacji dostępnych w okresie $t-1$, $D(0, H_t)$ oznacza określoną postać wielowymiarowej funkcji gęstości o wartościach oczekiwanych równych zeru i macierzy kowariancji H_t, C, D_i oraz E_j są macierzami parametrów o wymiarach $N \times N$, a macierz C jest macierzą trójkątną.

W pracy przyjęto dwa warunkowe rozkłady ε_t: wielowymiarowy rozkład normalny oraz t-Studenta. Diagonalna postać modelu BEKK (diagonalny BEKK) zakłada, że macierze D_i i E_j są macierzami diagonalnymi, natomiast skalarna postać (skalarny BEKK) zakłada, że powyższe macierze są zastąpione skalarami pomnożonymi przez macierz jedynek. Zastępując macierze D_i i E_j skalarami $d_i^{1/2}$ i $e_j^{1/2}$ otrzymamy model skalarno-diagonalny. Dalsze uproszczenie modelu uzyskujemy zakładając:

$$CC' = 0 \text{ oraz } \sum_{i=1}^{q} d_i + \sum_{j=1}^{p} e_j = 1.$$

Taka specyfikacja modelu jest określana jako model zintegrowany.

[4] Nazwa pochodzi od pierwszych liter nazwisk autorów.

Bollerslev (1990) wprowadził model stałych warunkowych współczynników korelacji, w którym zakłada się, że zmieniające się w czasie warunkowe kowariancje są proporcjonalne do iloczynu odpowiednich warunkowych odchyleń standardowych:

$$H_t = D_t \Gamma D_t, \tag{9}$$

gdzie D_t oznacza macierz diagonalną o wymiarach $N \times N$, której elementami są warunkowe odchylenia standardowe opisane za pomocą dowolnych jednorównaniowych modeli GARCH — $D_t = \mathrm{diag}(h_{1t}^{1/2}, h_{2t}^{1/2}, \ldots, h_{Nt}^{1/2})$, a Γ jest macierzą stałych warunkowych współczynników korelacji.

Kolejna rozważana specyfikacja modelu to K-czynnikowy model GARCH(p,q), zaproponowany przez Engle'a (1987). Model ten można przedstawić w postaci:

$$H_t = \Omega + \sum_{k=1}^{K} g_k g'_k h^*_{kt}, \tag{10}$$

gdzie Ω jest symetryczną macierzą parametrów o wymiarach $N \times N$, g_k jest wektorem parametrów o wymiarach $N \times 1$, h^*_{kt} oznaczają wariancje warunkowe czynników opisane za pomocą jednorównaniowych modeli GARCH.

Badano również ortogonalny model GARCH (Alexander i Chibumba, 1996):

$$V^{-1/2}\varepsilon_t = u_t = \Lambda_m f_t, \tag{11}$$

$$H_t = V^{1/2} V_t V^{1/2}, \tag{12}$$

gdzie $V = \mathrm{diag}\,(v_1, v_2, \ldots, v_N)$, v_i jest bezwarunkową wariancją ε_{it}, Λ_m to macierz wektorów własnych (ortogonalnych) o wymiarach $N \times m$, $f_t = (f_{1t}\ f_{2t}\ \ldots\ f_{mt})'$ jest procesem o warunkowych parametrach: $E_{t-1}(f_t) = 0$, $Var_{t-1}(f_t) = Q_t = \mathrm{diag}(\sigma^2_{f_{1t}}, \sigma^2_{f_{2t}}, \ldots, \sigma^2_{f_{mt}})$, $\sigma^2_{f_{it}}$ jest opisane za pomocą jednorównaniowego stacjonarnego modelu GARCH (dla $i = 1, 2, \ldots, m$), $V_t = Var_{t-1}(u_t) = \Lambda_m Q_t \Lambda'_m$.

Model DCC (*dynamic conditional correlation*) wprowadzony przez Engle'a (2002) można przedstawić w następującej formie:

$$H_t = D_t R_t D_t, \tag{13}$$

$$R_t = Q_t^{*-1} Q_t Q_t^{*-1}, \tag{14}$$

$$Q_t = \left(1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i - \sum_{j=1}^{p} \beta_j\right) S + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (z_{t-i} z'_{t-i}) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j Q_{t-j}, \tag{15}$$

gdzie $D_t = \mathrm{diag}\left(h_{1t}^{1/2}, h_{2t}^{1/2}, ..., h_{Nt}^{1/2}\right)$, warunkowe wariancje h_{kt} (dla $k = 1, 2, ..., N$) opisane są za pomocą jednorównaniowych modeli GARCH, z_t to wektor standaryzowanych wartości ε_{kt}, takich że $z_{kt} = \varepsilon_{kt}/\sqrt{h_{kt}}$, R_t to macierz zmiennych w czasie warunkowych współczynników korelacji dla z_t, S oznacza bezwarunkową macierz kowariancji dla z_t, a Q_t^* jest macierzą diagonalną, której elementami są pierwiastki kwadratowe z elementów diagonalnych macierzy Q_t.

Jeżeli Q_t jest opisane równaniem:

$$Q = (1 - \lambda)\,(z_{t-1} z'_{t-1}) + \lambda Q_{t-1}, \tag{16}$$

to model DCC jest wówczas określany jako zintegrowany model DCC.

W badaniu dla dwudziestu aktywów zastosowano również upraszczające parametryzacje dla procesów kowariancyjnie stacjonarnych, tzw. celowanie w wariancję (Engle i Mezrich, 1996). Na przykład dla skalarno-diagonalnego modelu (1,1) iloczyn macierzy wyrazów wolnych określony jest jako:

$$CC'\,(1 - d_1 - e_1)\,S. \tag{17}$$

Estymacja upraszczającej parametryzacji modelu przebiega w dwóch krokach[5]. W pierwszym kroku estymuje się bezwarunkową macierz kowariancji $S = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t \varepsilon'_t$, uzyskane szacunki podstawia się do estymacji wielorównaniowego modelu GARCH w drugim kroku.

4. OCENA EFEKTYWNOŚCI DLA TRZECH SPÓŁEK

Ocenę skuteczności przedstawionego podejścia do wyznaczania portfeli efektywnych dokonano na podstawie rzeczywistych danych finansowych. Przeprowadzono dwie analizy. Pierwsza dotyczyła małej liczby aktywów, mianowicie trzech spółek akcyjnych. Budowa portfela na podstawie tylko trzech aktywów wydaje się być problemem mało istotnym z praktycznego punktu widzenia, ponieważ przy konstrukcji portfela na ogół bierze się pod uwagę od co najmniej kilkunastu do nawet kilkuset aktywów. Jednakże przyjęcie małej liczby aktywów pozwoliło na zastosowanie dużej liczby specyfikacji wielorównaniowych modeli GARCH, a także umożliwiło analizę określonych restrykcji w modelach. Takie badanie nie byłoby możliwe dla dużej liczby aktywów. Do analizy przyjęto dzienne stopy zwrotu od 4 stycznia 1999 roku do 30 czerwca 2006 roku (1880 obserwacji). Spośród spółek notowanych przez cały przyjęty okres na Giełdzie

[5] Dla modelu DCC estymacja będzie wówczas przebiegała w trzech krokach.

Papierów Wartościowych w Warszawie wybrano trzy spółki o największej kapitalizacji: KGHM Polska Miedź, Bank Pekao SA oraz Telekomunikacja Polska. Wybrane spółki należą do najbardziej płynnych spółek. Przyjęto jednodniowy horyzont prognozy, ponieważ prognozy zmienności uzyskane na podstawie modeli GARCH są bardziej trafne w przypadku bardzo krótkiego horyzontu prognozy (np. West i Cho, 1995; Andersen i Bollerslev, 1998), w przeciwieństwie do długiego horyzontu, dla którego prognozy obliczone na podstawie innych modeli są bardzo często dokładniejsze. Dane z trzech pierwszych lat zostały wykorzystane jedynie przy estymacji modelu. Ocena skuteczności przedstawionej metody została dokonana dla stosunkowo długiego okresu, mianowicie na podstawie danych z okresu od stycznia 2002 do czerwca 2006 roku (1131 obserwacji). Własności procesów w krótkim okresie mogą znacznie odbiegać od własności w długim okresie, dlatego wyniki analiz przeprowadzonych dla krótkiego okresu mogą być mylące. Zaczynając od 31 grudnia 2001 roku na podstawie danych od początku 1999 roku szacowano parametry wszystkich rozważanych modeli. Na podstawie każdego modelu konstruowano prognozę warunkowej macierzy kowariancji na następną sesję. Na podstawie sformułowanej prognozy wyznaczono dwa portfele efektywne. Pierwszy, to portfel o minimalnej wariancji, drugi — o minimalnej wariancji przy dziennym minimalnym poziomie oczekiwanej stopy zwrotu równym 0,5%. W obu przypadkach założono nieskończoną podzielność aktywów, możliwość krótkiej sprzedaży oraz brak kosztów transakcyjnych. Następnie — *ex post* — obliczano osobno wariancje dla tych portfeli jako kwadrat zaobserwowanych stóp zwrotu. Dla następnych okresów dodawano kolejno jedną obserwację do danych, na podstawie których szacowano model i powtarzano całą procedurę aż do 29 czerwca 2006 roku. Zatem parametry każdego z zastosowanych w pracy modeli były szacowane 1131 razy. Dla każdego modelu z oszacowanych *ex post* wariancji portfeli dla okresu od stycznia 2002 do czerwca 2006 roku obliczono średnie, osobno dla portfeli o minimalnej wariancji oraz portfeli o minimalnej wariancji przy zadanej minimalnej oczekiwanej stopie zwrotu. W tym drugim przypadku prognozy stóp zwrotu były konstruowane na podstawie modelu VAR. Otrzymane wyniki zostały przedstawione w tabeli 1 (przedstawiono odchylenia standardowe). Przy budowie portfela o minimalnej wariancji przy zadanej minimalnej oczekiwanej stopie zwrotu nie wiadomo, czy skuteczność (bądź nieskuteczność) metody wynika z prognoz stóp zwrotu, czy też z prognoz wariancji i kowariancji stóp zwrotu. Głównym celem tej analizy jest ocena efektywności tworzenia portfeli z wykorzystaniem różnych specyfikacji wielorównaniowych modeli GARCH, dlatego interpretację wyników przeprowadzono w stosunku do procedury budowy portfela o minimalnej wariancji, która nie zależy od wyboru metody prognozowania stóp zwrotu (z pewnymi wyjątkami miejsca w rankingu, przy ocenie efektywności budowy portfela o minimalnej wariancji przy zadanej minimalnej oczekiwanej stopie zwrotu, dla większości modeli były zbliżone).

Tabela 1

Szacunki średnich odchyleń standardowych stóp zwrotu portfeli o minimalnej wariancji oraz portfeli o minimalnej wariancji przy zadanym poziomie oczekiwanej stopy zwrotu dla trzech spółek

Oznaczenie portfeli	Bez ograniczenia stopy zwrotu	Ranking	Min. stopa zwrotu 0,5%	Ranking
Jednorówn. modele GARCH	0,016331	6	0,112919	7
BEKK	0,016430	10	0,123315	17
BEKK rozkład *t*-Studenta	0,016529	11	0,121536	16
Diagonalny BEKK	0,016311	4	0,114276	12
Skalarny BEKK	0,016821	13	0,114074	10
Skalarno-diagonalny	0,016277	1	0,111847	5
Zintegrowany	0,016329	5	0,114606	13
Stałych współ. korelacji	0,016304	3	0,113650	9
K-czynnikowy 2 czynniki	0,016915	16	0,115408	14
Ortogonalny 2 czynniki	0,142260	19	0,230898	18
Ortogonalny 3 czynniki	0,016902	15	0,117250	15
DCC	0,016360	7	0,111523	1
DCC zintegrowany	0,016397	8	0,111817	4
Równe wagi	0,016936	17	—	—
Bezwarunkowa macierz kowariancji	0,016899	14	0,114074	11
Ruchoma macierz kowariancji	0,016282	2	0,111666	2
Ruch. macierz kowariancji $k = 25$	0,017049	18	0,112656	6
Wyrównywanie wykładnicze	0,016424	9	0,113460	8
RiskMetrics	0,016586	12	0,111713	3

Źródło: obliczenia własne.

W badaniu zastosowano metody prognozowania macierzy kowariancji stóp zwrotu opisane w punkcie 3.

W większości prac dotyczących efektywności metod tworzenia portfeli bardzo ogólnikowo analizuje się własności badanych szeregów czasowych, przez co nie możliwe jest sformułowanie bardziej ogólnych wniosków dotyczących poszczególnych metod estymacji macierzy kowariancji stóp zwrotu. W tabeli 2 zaprezentowano wyniki testów dotyczących zarówno własności szeregów stóp

Tabela 2

Analiza własności i charakteru zależności badanych szeregów dla trzech spółek

Weryfikowane hipotezy	Statystyka	Oceny statystyk		
		Pekao BP	TP SA	KGHM
Brak autokorelacji	Ljunga-Boxa(12)	19,31	13,85	11,37
Brak efektu ARCH	LM(12)	56,03*	149,02*	92,36*
Normalność rozkładów bezwarunkowych	Jarque-Bera	372,01*	224,70*	944,14*
Normalność rozkładu warunkowego w modelu BEKK	LR	174,08*		
Stałość warunkowych współczynników korelacji	LMC	5,58		
BEKK — macierze diagonalne	LR	42,72*		
BEKK — skalary razy macierz jedynek	LR	482,01*		
BEKK — skalary	LR	71,78*		
Diagonalny BEKK — skalary	LR	28,92*		
Skalarno-diagonalny — $CC' = 0$, $e_1 = 1 - d_1$	LR	96,21*		
Zintegrowany GARCH — $1 - d_1 = 0{,}94$	LR	149,41*		

Gwiazdką oznaczono oceny statystyk, w przypadku których weryfikowana hipoteza została odrzucona na poziomie istotności 0,05.

Źródło: obliczenia własne.

zwrotu badanych spółek, jak i charakteru zależności między nimi. Stopy zwrotu były pozbawione autokorelacji, miały zmienną wariancję warunkową, a ich rozkłady bezwarunkowe były różne od rozkładu normalnego. Do opisu warunkowej macierzy kowariancji wystarczająca okazała się parametryzacja GARCH(1,1). Uzyskane wyniki testowania restrykcji nakładanych na parametry modeli GARCH, omawiane w dalszej części pracy, były niewrażliwe na przyjętą specyfikację rozkładu warunkowego.

Najbardziej złożoną parametryzacją spośród rozważanych modeli jest model BEKK. Estymowano model BEKK z warunkowym rozkładem normalnym oraz *t*-Studenta. Według testu LR model BEKK z warunkowym rozkładem normalnym został zdecydowanie odrzucony na korzyść modelu z warunkowym rozkładem *t*-Studenta. Jednakże, jak się okazuje, lepsze dopasowanie w próbie w tym przypadku nie przekłada się na wzrost skuteczności przy tworzeniu portfeli efektywnych. Ten rezultat jest o tyle ważny, że estymacja parametrów modelu BEKK z warunkowym rozkładem *t*-Studenta była najbardziej czasochłonna i często występowały problemy ze znalezieniem odpowiednich wartości startowych.

W celu wykluczenia przypuszczenia, że uzyskany wynik jest charakterystyczny tylko dla modelu BEKK i jest następstwem trudności z estymacją parametrów tego modelu, rozważono jeszcze dodatkowo najlepszy w rankingu model, czyli model skalarno-diagonalny z warunkowym rozkładem *t*-Studenta. Dla tego modelu nie było żadnych problemów z estymacją parametrów. Okazało się, że również w tym przypadku lepsze dopasowanie w próbie nie przekłada się na wzrost efektywności przy konstrukcji portfeli. Szacunki średnich odchyleń standardowych portfeli o minimalnej wariancji wynosiły 0,016277 i 0,016303 odpowiednio dla modeli z warunkowym rozkładem normalnym i *t*-Studenta.

Liczba parametrów w modelu BEKK w przypadku dużej liczby walorów w portfelu jest na tyle duża, że ich estymacja jest bardzo trudna lub wręcz niemożliwa. Z tego względu zbadano, jaki wpływ na efektywność procesu alokacji aktywów ma uproszczenie postaci wielorównaniowego modelu GARCH. W pierwszej kolejności rozważano diagonalną i skalarną postać modelu BEKK oraz model skalarno-diagonalny. Wszystkie trzy specyfikacje modelu są zagnieżdżone w modelu BEKK, a wyniki testu LR wskazują na odrzucenie restrykcji nałożonych przez te postacie modelu. O ile skalarna postać modelu BEKK prowadzi do spadku efektywności przy konstrukcji portfeli o minimalnej wariancji, o tyle zaskakujący jest wzrost efektywności dla diagonalnego modelu BEKK oraz modelu skalarno-diagonalnego. Model skalarno-diagonalny ma tyle samo parametrów co skalarny model BEKK (dwa parametry poza wyrazami wolnymi), jednakże jego parametryzacja jest znacznie prostsza. Pomimo tak prostej specyfikacji postać ta okazała się być najlepszą przy konstrukcji portfeli o minimalnej wariancji. Najprostszą postacią modelu przy tej parametryzacji jest zintegrowany model GARCH. Jest on modelem zagnieżdżonym w modelu skalarno-diagonalnym. Według testu LR model zintegrowany został odrzucony na korzyść modelu skalarno-diagonalnego. Zatem wyniki testu są zgodne z wynikami skuteczności konstrukcji portfeli efektywnych.

Kolejnym uproszczeniem modelu jest przyjęcie założenia, że warunkowe korelacje stóp zwrotu są stałe w czasie. W pierwszej kolejności zastosowano jednorównaniowe modele GARCH, które pozwalają opisać i prognozować zmieniające się w czasie warunkowe wariancje stóp zwrotu. Estymacja jednorównaniowych modeli GARCH jest znacznie prostsza, jednakże modele te nie pozwalają opisać zmieniających się w czasie warunkowych korelacji. Macierz korelacji była estymowana na podstawie rozkładu brzegowego standaryzowanych reszt. Na podobnych założeniach opiera się model stałych warunkowych współczynników korelacji. Jest to jednakże model wielorównaniowy i w odróżnieniu od modeli jednorównaniowych wszystkie parametry są estymowane łącznie, co przełożyło się na wzrost efektywności przy konstrukcji portfela o minimalnej wariancji. Zauważmy, że powyższe modele uplasowały się na wysokich miejscach w rankingu, wyprzedzając większość specyfikacji pozwalających opisać zmieniające się warunkowe współczynniki korelacji. Jak się okazuje bardziej złożone modele, nie muszą dawać lepszych prognoz macierzy kowariancji szczególnie, że w tym przypadku hipoteza o stałości warunkowych współczynników korelacji nie została odrzucona na podstawie testu Tse (2000). Na podkreślenie zasługuje szóste miejsce w rankingu modeli jednorównaniowych, które można zastosować dla dowolnie dużej liczby aktywów, a ich estymacja jest znacząco krótsza[6].

Następne parametryzacje, mianowicie K-czynnikowy model GARCH oraz ortogonalny model GARCH zakładają, że stopy zwrotu aktywów są zależne od wspólnych niezależnych czynników. Podstawową zaletą tych specyfikacji jest łatwość estymacji parametrów nawet dla bardzo dużej liczby szeregów za pomocą uproszczonych procedur opartych na modelach jednorównaniowych. W obu przypadkach czynniki zostały wyodrębnione na podstawie analizy głównych składowych. Wspólne czynniki wyjaśniały odpowiednio 64%, 21% i 15% zmienności stóp zwrotu badanych spółek. Model *K*-czynnikowy oraz ortogonalny plasują się na odległych miejscach w rankingu, co wynika przede wszystkim z utraty istotnych informacji[7]. Dla dwóch czynników zdecydowanie lepiej wypada model *K*-czynnikowy[8], ponieważ wszystkie parametry tego modelu są estymowane. Jednakże przy dużej liczbie aktywów w przypadku modelu ortogonalnego zwiększanie liczby czynników nie powoduje wzrostu trudności w estymacji parametrów modelu.

Kolejną rozważaną parametryzacją wielorównaniowego modelu GARCH był model DCC. Podobnie, jak w przypadku dwóch poprzednich modeli główną zaletą tej parametryzacji jest możliwość estymacji parametrów za pomocą procedury dwustopniowej. Model DCC i jego zintegrowana wersja uplasowały się na odpowiednio siódmym i ósmym miejscu.

Słabsza efektywność w procesie alokacji aktywów najbardziej złożonych postaci modeli, takich jak model BEKK może wynikać z dwóch powodów. Po pierwsze, rzeczywiste zależności mogą mieć prostszą strukturę i parametryzacja modelu BEKK jest zbyt złożona. Po drugie, uzyskane oceny parametrów nie gwarantowały stacjonarności wielowymiarowego procesu. Znalezienie ekstremum funkcji wiarygodności przy nałożonych restrykcjach gwarantujących stacjonarność okazało się niemożliwe. Trudności z estymacją parametrów modelu BEKK już przy tak małej liczbie aktywów przemawiają na korzyść prostszych postaci modeli.

Uzyskane wyniki dla modeli GARCH zostały porównane z wynikami otrzymanymi na podstawie innych metod konstrukcji portfeli, w tym również metod

---

[6] Dla trzech spółek estymacja wielorównaniowego modelu GARCH była około dziesięć razy dłuższa, dla większej liczby aktywów różnica jest jeszcze bardziej znacząca.

[7] Modele czynnikowe wypadają słabo już przy opisie szeregów finansowych — patrz badanie Osiewalskiego i Pipienia (2004) dla modelu GARCH z ukrytym czynnikiem.

[8] Dla trzech czynników jest podobnie, z tym że estymacja 3-czynnikowego modelu nie ma podstaw teoretycznych.

stosowanych przez praktyków rynku finansowego. Budowano sześć portfeli. Pierwszy portfel — statyczny został skonstruowany w ten sposób, że dla wszystkich okresów przyjęto równe wagi dla trzech walorów — $W'_{t+1} = (1/3, 1/3, 1/3)$. Portfel ten służy wyłącznie jako punkt odniesienia. Pozostałe portfele różniły się jedynie metodą prognozowania macierzy kowariancji stóp zwrotu. Tradycyjny sposób konstrukcji portfela polega na zastosowaniu bezwarunkowej macierzy kowariancji. Uzyskane wyniki wskazują, że klasyczne podejście zakładające stałość warunkowych wariancji i kowariancji prowadzi do spadku efektywności, choć należy zauważyć, że występowały modele o zmiennej macierzy kowariancji, które plasowały się jeszcze dalej w rankingach.

Praktycy rynku finansowego do prognozowania macierzy kowariancji stosują najczęściej ruchomą macierz kowariancji oraz model wyrównywania wykładniczego. W badaniu przyjęto dwa modele stosowane przez analityków J. P. Morgan — ruchomą macierz kowariancji ze stałą wygładzania równą 25 oraz model wyrównywania wykładniczego z parametrem wygasania równym 0,94. Modele te uplasowały się na dalekich pozycjach w rankingu przy konstrukcji portfela o najmniejszej wariancji, choć należy podkreślić, że wypadły znacznie lepiej w rankingu przy budowie portfela o minimalnej wariancji dla zadanej oczekiwanej stopy zwrotu. Zauważmy, że model wyrównywania wykładniczego z parametrem wygasania 0,94 jest szczególnym przypadkiem zintegrowanego wielorównaniowego modelu GARCH. Wynik testu LR zdecydowanie odrzuca model RiskMetrics na korzyść modelu zintegrowanego. Tak jak można było przypuszczać estymacja parametru wygasania daje lepsze rezultaty niż przyjmowanie pewnych wartości z góry. Dodatkowo zastosowano również procedurę zaproponowaną w pracy Fiszedera (2004a), polegającą na wyborze stałej wygładzania w modelu średniej ruchomej oraz parametru wygasania w modelu wyrównywania wykładniczego dla każdego okresu na podstawie próbki wstępnej. Próbka wstępna miała 150 obserwacji, stała wygładzania mogła przyjmować wartości od 5 do 120, a parametr wygasania od 0,6[9] do 0,99 (co 0,01). Wybierano te wartości, dla których średnie odchylenie standardowe stóp zwrotu wyznaczonych portfeli o minimalnej wariancji było najmniejsze w próbce wstępnej. Przy takiej procedurze znacznie gorzej wypadł model wyrównywania wykładniczego, natomiast model ruchomej macierzy kowariancji uplasował się na drugim miejscu w rankingu, wyprzedzając wszystkie poza modelem skalarno-diagonalnym specyfikacje wielorównaniowego modelu GARCH.

Dodatkowo dla modeli, których parametry były szacowane jednocześnie oraz tam gdzie było możliwe oszacowanie łącznej funkcji wiarygodności podano szacunki bayesowskiego kryterium Schwarza (tab. 3). Wprawdzie uzyskany ranking modeli według tego kryterium nie pokrywa się z rankingiem otrzyma-

---

[9] W modelu wyrównywania wykładniczego dla macierzy kowariancji bardzo rzadko się zdarza, aby wyznaczony parametr wygasania przyjmował wartości poniżej 0,9.

Tabela 3

Ranking modeli według bayesowskiego kryterium Schwarza dla trzech spółek

Oznaczenia portfeli	SC	Ranking
BEKK	–27 698	8
BEKK rozkład t-Studenta	–27 882	1
Diagonalny BEKK	–27 746	6
Skalarny BEKK	–27 337	10
Skalarno-diagonalny	–27 748	5
Zintegrowany	–27 704	7
Stałych współ. korelacji	–27 783	4
DCC	–27 806	3
DCC zintegrowany	–27 807	2
RiskMetrics	–27 562	9

Źródło: obliczenia własne.

nym na podstawie wyników konstrukcji portfeli o minimalnej wariancji, ale jest bardziej do niego zbliżony, niż wyniki bezpośredniego testowania restrykcji przedstawione w tabeli 2.

Wnioski

Uwzględnienie zmieniających się w czasie wariancji i kowariancji stóp zwrotu przy budowie portfela, z pewnymi wyjątkami, wpływa na wzrost efektywności alokacji aktywów. Uproszczenie postaci warunkowej macierzy kowariancji prowadzi na ogół do zmniejszenia szacunków odchyleń standardowych portfeli o minimalnej wariancji, często na przekór wynikom testów. Wydaje się, że parametryzacja modelu BEKK jest zbyt złożona. Wynik ten jest ważny z praktycznego punktu widzenia, ponieważ estymacja uproszczonych postaci wielorównaniowego modelu GARCH jest znacznie łatwiejsza. Wyjątkiem od tej zasady jest skalarny model BEKK oraz modele: *K*-czynnikowy i ortogonalny, przy których występuje znaczna utrata informacji. Wyniki przeprowadzonych testów statystycznych tylko w części zostały potwierdzone przez badanie skuteczności tworzenia portfeli. Jako ważny wyjątek, warto zauważyć, że w przypadku modelu BEKK zastąpienie warunkowego rozkładu *t*-Studenta rozkładem normalnym nie powoduje spadku skuteczności przy budowie portfeli.

Niespełnienie klasycznych założeń dotyczących testowania (np. brak normalności rozkładu) oraz złożoność rozważanych parametryzacji nie pozwala na zbadanie statystycznej istotności różnic pomiędzy odchyleniami standardowymi portfeli otrzymanymi dla rozważanych specyfikacji modeli. Możliwa jest jednak ocena ekonomiczna występujących różnic. Na przykład zastosowanie modelu skalarno-diagonalnego przy konstrukcji portfela o minimalnej wariancji prowadzi do spadku dziennego odchylenia standardowego portfela o minimalnej wariancji o 3,7% w stosunku do tradycyjnej metody szacowania macierzy kowariancji, czyli bezwarunkowej macierzy kowariancji. Ważniejsze od zmian stosunkowych są dla inwestorów różnice w poziomach zmiennych (stóp zwrotu), które w tym przypadku wynoszą 0,0642 punktu procentowego dla dziennych stóp zwrotu, co w skali roku daje zmianę o ponad 1 punkt procentowy (spadek z około 26,9% do 25,9%)[10]. W tym przypadku różnica jest istotna z ekonomicznego punktu widzenia[11], jednakże różnice pomiędzy niektórymi modelami są dużo mniejsze. Na przykład różnica pomiędzy pierwszym a szóstym modelem w rankingu w skali roku jest mniejsza niż 0,1 punktu procentowego. Zatem dla większości inwestorów wystarczające jest zastosowanie najprostszej metody estymacji macierzy kowariancji stóp zwrotu, czyli modelu ruchomej macierzy kowariancji ze stałą wygładzania wybieraną dla każdego okresu na podstawie próbki wstępnej lub jednorównaniowych modeli GARCH.

Oczywiście otrzymanych wyników nie można uogólnić na dowolne spółki czy aktywa finansowe. Wybrane spółki należą do największych pod względem kapitalizacji oraz najbardziej płynnych spółek notowanych na GPW w Warszawie. W podobnym badaniu przeprowadzonym na danych tygodniowych dla spółek mniejszych i mniej płynnych (Fiszeder, 2004b) różnice pomiędzy poszczególnymi modelami były bardziej istotne z ekonomicznego punktu widzenia. Jednakże główne wnioski wynikające z analizy były zbliżone do przedstawionych wyżej. Podobnie uzyskanych rezultatów nie można jednoznacznie uogólnić na dowolną liczbę aktywów, dlatego w dalszej części rozdziału przedstawiono wyniki analizy dla dwudziestu spółek.

5. OCENA EFEKTYWNOŚCI DLA DWUDZIESTU SPÓŁEK

Badanie dla dwudziestu aktywów było analogiczne do tego, które zostało przeprowadzone dla trzech aktywów. Dla dużej liczby aktywów jest bardzo mało analiz, w których ocenia się skuteczność budowy portfeli efektywnych z zastosowaniem prognoz macierzy kowariancji konstruowanych na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH. Takie badania zostały przeprowadzone między innymi przez Engle'a i Shepparda (2001), jednakże oceniali oni tylko dwa modele, mianowicie model DCC i model RiskMetrics. Porównywali

[10] Wyniki zostały przeliczone na zwykłe stopy zwrotu.

[11] Do pełnej oceny należałoby jeszcze zbadać jaki jest wpływ uwzględnienia kosztów transakcyjnych.

oni wariancję portfela z prognozowaną wariancją portfela i doszli do wniosku, że przy dużej liczbie aktywów oba modele nie są skuteczne przy konstrukcji portfeli efektywnych. W niniejszej pracy do analizy przyjęto taki sam okres, jak przy badaniu trzech spółek, czyli od 4 stycznia 1999 roku do 30 czerwca 2006 roku. Spośród spółek notowanych przez cały przyjęty okres na GPW w Warszawie wybrano dwadzieścia spółek o największej kapitalizacji: Bank BPH, Bank Millennium, Bank Pekao S.A., BRE Bank, Bank Zachodni WBK, Budimex, Cersanit, Citibank Handlowy, Computerland, Firma Oponiarska Dębica, ING Bank Śląski, Grupa Kęty, KGHM Polska Miedź, Kredyt Bank, Mondi Packaging Paper Świecie, Orbis, Polska Grupa Farmaceutyczna, Prokom Software, Softbank, Telekomunikacja Polska. Przy wyborze pominięto spółki, dla których udział liczby sesji, podczas których nie były notowane przekraczał 5%. Miało to na celu uniknięcie problemu niesynchronicznych transakcji. Dla większości specyfikacji jednoczesna estymacja parametrów wielorównaniowego modelu GARCH jest znacznie trudniejsza w przypadku dwudziestu aktywów. Dla najbardziej złożonych parametryzacji estymacja okazała się nawet niemożliwa z uwagi na bardzo dużą liczbę parametrów. Na przykład najprostsza postać modelu BEKK z $K = 1$ oraz $p = q = 1$ ma tysiąc dziesięć parametrów w samym równaniu dla macierzy kowariancji. Dlatego konieczne było ograniczenie rozważanych specyfikacji modelu. Przyjęto tylko te postacie, których parametry można oszacować bez konieczności poszukiwania „dobrych" wartości startowych w czasie nie przekraczającym kilkunastu godzin (między zamknięciem sesji a otwarciem dnia następnego). W badaniu zastosowano osiem specyfikacji wielorównaniowego modelu GARCH: model skalarno-diagonalny, model skalarno-diagonalny z warunkowym rozkładem t-Studenta, model zintegrowany, K-czynnikowy model GARCH dla trzech czynników, model ortogonalny dla trzech oraz dwudziestu czynników, model DCC oraz zintegrowany model DCC. Wyniki uzyskane dla modeli GARCH porównano z wynikami uzyskanymi na podstawie innych metod, które zastosowano przy badaniu trzech spółek. Otrzymane rezultaty zaprezentowano w tabeli 4.

Miejsca poszczególnych modeli w rankingach są bardzo zbliżone, niezależnie od tego czy portfel o minimalnej wariancji konstruowany jest bez ograniczenia minimalnej stopy zwrotu, czy przy zadanej minimalnej oczekiwanej dziennej stopie zwrotu na poziomie 0,5%. Dalej interpretowane są tylko wyniki dla portfeli o minimalnej wariancji.

Przeprowadzono również wybrane testy dotyczące własności stóp zwrotu badanych spółek. Poza czterema spółkami (Computerland, Millennium, Prokom i Softbank) stopy zwrotu były pozbawione autokorelacji. Stopy zwrotu wszystkich spółek miały zmienną wariancję warunkową, a ich rozkłady bezwarunkowe były różne od rozkładu normalnego. W tabeli 5 przedstawiono wyniki testów dotyczących charakteru zależności między stopami zwrotu badanych spółek. Uzyskane wyniki testowania restrykcji nakładanych na parametry modeli

Tabela 4

Szacunki średnich odchyleń standardowych stóp zwrotu portfeli o minimalnej wariancji oraz portfeli o minimalnej wariancji przy zadanym poziomie oczekiwanej stopy zwrotu dla dwudziestu spółek

Oznaczenia portfeli	Bez ograniczenia stopy zwrotu	Ranking	Min. stopa zwrotu 0,5%	Ranking
Jednorównaniowe modele GARCH	0,008262	8	0,011437	7
Skalarno-diagonalny	0,007810	3	0,011221	4
Skalarno-diagonalny rozkład *t*-Studenta	0,007829	4	0,011235	5
Zintegrowany	0,007794	1	0,011154	2
K-czynnikowy 3 czynniki	0,049739	14	0,073727	13
Ortogonalny 3 czynniki	0,274143	15	0,437218	14
Ortogonalny 20 czynników	0,008320	9	0,011520	8
DCC	0,008014	6	0,011157	3
DCC zintegrowany	0,007801	2	0,011036	1
Równe wagi	0,010254	12	—	—
Bezwarunkowa macierz kowariancji	0,008384	10	0,011811	9
Ruchoma macierz kowariancji	0,008038	7	0,011591	12
Ruch. macierz kowariancji $k = 25$	0,015340	13	0,020486	11
Wyrównywanie wykładnicze	0,007955	5	0,011312	6
RiskMetrics	0,009226	11	0,013628	10

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 5

Analiza własności i charakteru zależności badanych szeregów dla dwudziestu spółek

Weryfikowane hipotezy	Statystyka	Oceny statystyk
Normalność rozkładu warunkowego w modelu skalarno-diagonalnym	LR	8925*
Stałość warunkowych współczynników korelacji	LMC	409*
Skalarno-diagonalny — $CC' = 0$, $e_1 = 1 - d_1$	LR	1192*
Zintegrowany GARCH — $1 - d_1 = 0{,}94$	LR	26382*

Gwiazdką oznaczono oceny statystyk, w przypadku których weryfikowana hipoteza została odrzucona na poziomie istotności 0,05.

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 6

Ranking modeli według bayesowskiego kryterium Schwarza dla dwudziestu spółek

Oznaczenia portfeli	SC	Ranking
Skalarno-diagonalny	-190 783	5
Skalarno-diagonalny rozkład *t*-Studenta	-194 311	1
Zintegrowany	-191 179	4
DCC	-192 506	3
DCC zintegrowany	-193 138	2
RiskMetrics	-164 814	6

Źródło: obliczenia własne.

GARCH były niewrażliwe na przyjętą specyfikację rozkładu warunkowego. Dodatkowo w tabeli 6 przedstawiono ranking modeli na podstawie bayesowskiego kryterium Schwarza.

W celu ograniczenia liczby parametrów dla modeli skalarno-diagonalnego, zintegrowanego oraz DCC zastosowano upraszczające parametryzacje dla procesów kowariancyjnie stacjonarnych. W pierwszej kolejności estymowano parametry modelu skalarno-diagonalnego z warunkowym rozkładem normalnym oraz *t*-Studenta. Według testu LR model z warunkowym rozkładem normalnym został zdecydowanie odrzucony na korzyść modelu z warunkowym rozkładem *t*-Studenta. Zastąpienie warunkowego rozkładu normalnego rozkładem *t*-Studenta nie powoduje jednakże spadku szacunków odchyleń standardowych portfeli o minimalnej wariancji.

Uproszczeniem modelu skalarno-diagonalnego jest model zintegrowany. Według testu LR model zintegrowany został odrzucony na korzyść modelu skalarno-diagonalnego. Wobec wyniku testu dosyć zaskakujące jest pierwsze miejsce modelu zintegrowanego w rankingu skuteczności przy konstrukcji portfela o minimalnej wariancji. Należy jednakże zauważyć, że różnica między odchyleniami standardowymi portfeli o minimalnej wariancji dla modeli skalarno-diagonalnego i zintegrowanego nie jest istotna z ekonomicznego punktu widzenia. Zastosowanie modelu zintegrowanego przy konstrukcji portfela o minimalnej wariancji prowadzi do spadku dziennego odchylenia standardowego portfela o minimalnej wariancji o 7% w stosunku do tradycyjnej metody szacowania macierzy kowariancji, czyli bezwarunkowej macierzy kowariancji. Ważniejsze od zmian stosunkowych są dla inwestorów różnice w poziomach zmiennych (stóp zwrotu), które w tym przypadku wynoszą 0,059 punktu procentowego dla dziennych stóp zwrotu, co w skali roku daje zmianę prawie 1 punkt procentowy (spadek z około 13,31% do 12,37%). Różnice pomiędzy wieloma modelami są jednakże dużo mniejsze. Różnica pomiędzy modelem zintegrowanym a trzecim w rankingu modelem skalarno-diagonalnym w skali roku jest równa 0,03 punktu procentowego.

Następne rozważane parametryzacje wielorównaniowego modelu GARCH, to modele *K*-czynnikowy oraz ortogonalny. W obu przypadkach przy estymacji parametrów zastosowano uproszczone procedury oparte na modelach jednorównaniowych. Czynniki zostały wyodrębnione na podstawie analizy głównych składowych. W większości prac dotyczących modeli czynnikowych autorzy sugerują, że dwa lub trzy czynniki wyjaśniają większość zmienności stóp zwrotu aktywów i są wystarczające do opisu macierzy kowariancji. Z tego względu w badaniu przyjęto trzy czynniki. Wyjaśniały one odpowiednio 32,4%, 5,9% oraz 5,1% zmienności stóp zwrotu badanych spółek. Modele te uplasowały się na ostatnich miejscach w rankingu. Nieuwzględnienie części zmienności prowadzi do zbyt dużej utraty informacji. Dodatkowo estymacja w drugim kroku równań dla modelu czynnikowego okazała się być bardzo wrażliwa na przyjęte wartości startowe. Model ortogonalny wypada zdecydowanie gorzej, ponieważ część jego parametrów jest wyznaczana na podstawie analizy głównych składowych. Ta wada w przypadku małej liczby czynników okazuje się być zaletą przy większej ich liczbie. Mianowicie rozszerzenie modelu i uwzględnienie większej liczby czynników (nawet wszystkich) nie powoduje wzrostu trudności w estymacji parametrów modelu. Dlatego rozważono również model ortogonalny z dwudziestoma czynnikami. Ding i Engle (2001) określali taki model jako model GARCH głównych składowych. Model ten wypadł zdecydowanie lepiej przy ocenie skuteczności konstrukcji portfeli efektywnych, jednakże gorzej niż inne nieczynnikowe postacie wielorównaniowych modeli GARCH.

Kolejną rozważaną parametryzacją modelu GARCH był model DCC. Przy estymacji parametrów modelu zamiast procedury dwustopniowej zastosowano procedurę trzystopniową. W pierwszym kroku szacowane są parametry jednorównaniowych modeli GARCH, w drugim kroku, estymuje się bezwarunkową macierz kowariancji dla standaryzowanych reszt z modeli jednorównaniowych, w trzecim kroku szacuje się parametry odpowiedzialne za zmienne kowariancje warunkowe. W przypadku zintegrowanej wersji modelu DCC można było zastosować procedurę dwustopniową, ponieważ parametryzacja modelu jest znacznie prostsza. Model DCC i zintegrowany model DCC uplasowały się wysoko w rankingu, mianowicie na szóstym i drugim miejscu.

Obok modeli wielorównaniowych zastosowano również jednorównaniowy model GARCH. Niestety skuteczność tego modelu przy konstrukcji portfeli efektywnych jest znacznie mniejsza niż dla trzech aktywów, choć ciągle daje lepsze rezultaty niż zastosowanie bezwarunkowej macierzy kowariancji. Może to wynikać z faktu, że warunkowe współczynniki korelacji dla dwudziestu spółek są zmienne w czasie (zob. wynik testu Tse w tabeli 5). Przyjęcie w takiej sytuacji stałej macierzy korelacji jest nieprawidłowe.

Pozostałe metody szacowania macierzy kowariancji uplasowały się na dalszych miejscach w rankingu. Najlepiej wypadł model wyrównywania wykładniczego dla macierzy kowariancji (piąte miejsce), w którym parametr wygasania wybierano dla każdego okresu na podstawie próbki wstępnej. Wynik testu LR zdecydowanie odrzuca natomiast model RiskMetrics, czyli model z parametrem wygasania równym 0,94 na korzyść modelu zintegrowanego. Ten wynik został później potwierdzony przy badaniu skuteczności tworzenia portfela o minimalnej wariancji. W przeprowadzonej analizie parametr wygasania przyjmował najczęściej wartość 0,98 lub 0,99. Warto zwrócić uwagę na słabszy rezultat w porównaniu z trzema spółkami modelu ruchomej macierzy kowariancji z wybieraną stałą wygładzania. Wynika to prawdopodobnie z ograniczenia maksymalnej wartości stałej wygładzania do 120. W przeprowadzonej analizie stała wygładzania przyjmowała najczęściej wartość 120 lub nieco niższą. Potwierdzeniem tego jest bardzo dalekie miejsce w rankingu modelu ruchomej macierzy kowariancji ze stalą wygładzania równą 25. Otrzymane wyniki wskazują, że modele, w których do konstrukcji prognoz macierzy kowariancji wykorzystuje się większą ilość danych z przeszłości, wypadają lepiej w rankingu.

6. PODSUMOWANIE

W pracy dokonano oceny skuteczności różnych metod tworzenia portfeli efektywnych, w tym przede wszystkim z wykorzystaniem różnych specyfikacji wielorównaniowych modeli GARCH. Generalnie wnioski wynikające z analizy dla dwudziestu spółek są zbliżone do tych, jakie otrzymano dla trzech spółek. Uwzględnienie zmieniających się w czasie wariancji i kowariancji stóp zwrotu przy budowie portfela z pewnymi wyjątkami wpływa na wzrost efektywności alokacji aktywów. Wyjątkiem są czynnikowe modele GARCH: *K*-czynnikowy i ortogonalny oraz model ruchomej macierzy kowariancji ze stalą wygładzania równą 25 oraz model wyrównywania wykładniczego dla macierzy kowariancji z parametrem wygasania równym 0,94. Przyjmowana w metodologii RiskMetrics wartość parametru stałej wygładzania, dla danych dziennych 0,94, nie jest wartością optymalną dla polskiego rynku akcji (jest zdecydowanie za niska).

Przy dwudziestu aktywach trudno jest oceniać wpływ uproszczenia postaci warunkowej macierzy kowariancji, ponieważ w zasadzie wszystkie rozważane parametryzacje należą do uproszczonych postaci wielorównaniowego modelu GARCH. Należy jednakże zauważyć, że zarówno przy trzech, jak i dwudziestu spółkach wysoko w rankingach wypadły proste postacie modeli GARCH, których parametry szacowane są jednocześnie, mianowicie model skalarno-diagonalny i zintegrowany. Warto podkreślić, że oba modele, obok modelu stałych współczynników korelacji, okazały się najlepsze ze względu na wyniki testów diagnostycznych w przypadku pięciu spółek z rynku amerykańskiego

(Ding i Engle, 2001). Wyniki przeprowadzonych w niniejszym badaniu testów statystycznych, z pewnymi wyjątkami, zostały potwierdzone przez badanie skuteczności tworzenia portfeli. Rankingi modeli uzyskane na podstawie bayesowskiego kryterium Schwarza okazały się nawet bardziej zbliżone do rankingów uzyskanych na podstawie wyników konstrukcji portfeli o minimalnej wariancji, niż wynikałoby to z bezpośredniego testowania restrykcji dotyczących szacowanych modeli.

Wyniki dotyczące zarówno trzech, jak i dwudziestu spółek sugerują, że zastąpienie warunkowego rozkładu normalnego w modelach GARCH rozkładem *t*-Studenta nie powoduje spadku szacunków odchyleń standardowych portfeli o minimalnej wariancji. Ten wynik jest ważny z praktycznego punktu widzenia, ponieważ estymacja parametrów modelu z warunkowym rozkładem *t*-Studenta jest trudniejsza i bardziej czasochłonna.

Podstawowa różnica w wynikach między trzema a dwudziestoma spółkami dotyczy modeli zintegrowanych. Zarówno model zintegrowany, jak i zintegrowany model DCC wypadły zdecydowanie lepiej w rankingu dla dwudziestu aktywów. Ten rezultat może sugerować, że w przypadku większej liczby aktywów wielowymiarowy proces stóp zwrotu nie jest procesem kowariancyjnie stacjonarnym, co jak wiadomo może być związane ze zmianami bezwarunkowych macierzy kowariancji w długim okresie.

Stosowanie jednorównaniowych modeli GARCH oraz szacowanie macierzy korelacji na podstawie rozkładów brzegowych standaryzowanych reszt wydaje się być dopuszczalne tylko w przypadku, gdy warunkowe współczynniki korelacji są stałe w czasie. Przy większej liczbie aktywów wydaje się, że rośnie prawdopodobieństwo, iż warunkowe współczynniki korelacji są zmienne w czasie i konieczne będzie zastosowanie modelu wielorównaniowego.

BIBLIOGRAFIA

Alexander C., Chibumba A. 1996. Multivariate Orthogonal Factor GARCH, University of Sussex Discussion Papers in Mathematics.

Andersen T., Bollerslev T. 1998. Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts, International Economic Review 39, 4, 885–905.

Baba Y., Engle R.F., Kraft D.F., Kroner K.F. 1990. Multivariate Simultaneous Generalized ARCH. maszynopis, Department of Economics, University of California at San Diego.

Bauwens L., Laurent S., Rombouts J.V.K. 2006. Multivariate GARCH Models: A Survey, Journal of Applied Econometrics 21, No. 1, 79–110.

Bollerslev T. 1990. Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Approach, Review of Economics and Statistics 72, 498–505.

Campbell J.Y., Lo A.W., MacKinlay A.C. 1997. The Econometrics of Financial Markets, Princeton University Press.

Ding Z., Engle R.F. 2001. Large Scale Conditional Covariance Matrix Modeling, Estimation and Testing, Academia Economic Papers 29, 2, 157–184.

Engle R.F. 1987. Multivariate ARCH with Factor Structures-Cointegration in Variance. Discussion Paper 87, University of California, San Diego.

Engle R.F. 2002. Dynamic Conditional Correlation — A Simple Class of Multivariate GARCH Models, Journal of Business and Economic Statistics, 20, 339–350.

Engle R.F., Kroner K.F. 1995. Multivariate Simultaneous Generalized ARCH, Econometric Theory 11, 122–150.

Engle R.F., Mezrich J. 1996. GARCH for Groups, Risk 9, 8, 36–40.

Engle R.F., Sheppard K. 2001. Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH, Mimeo, UCSD.

Fiszeder P. 2004a. Dynamiczna alokacja aktywów — Model Markowitza, Rynki finansowe — prognozy a decyzje, Acta Universitatis Lodziensis, Folia Oeconomica, 177, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

Fiszeder P. 2004b. Dynamiczna teoria portfela, Acta Universitatis Nicolai Copernici, Ekonomia 34, UMK Toruń.

Osiewalski J., Pipień M. 2004. Bayesian Comparison of Bivariate ARCH-Type Models for the Main Exchange Rates in Poland, Journal of Econometrics 123, 371–391.

Tse Y.K. 2000. A Test for Constant Correlations in A Multivariate GARCH Model, Journal of Econometrics 98, 107–127.

West K.D., Cho D. 1995. The Predictive Ability of Several Models of Exchange Rate Volatility, Journal of Econometrics 69, 367–391.