

## PODEJŚCIE STATYSTYCZNE W METODZIE DEA NA PRZYKŁADZIE JEDNOPRODUKTOWEGO MODELU BANKERA

ARTUR PRĘDKI

Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie  
*e-mail: predkia@uek.krakow.pl*

### ABSTRACT

A. Prędko. *Statistical approach in DEA on the example of single-product Banker's model.* Folia Oeconomica Cracoviensia 2012, 53: 41–58.

In this paper idea statistical approach in DEA method on the example of the single-product Banker's model is described. Its assumptions and following from them properties of the DEA estimator of point value production frontier is presented. Selected problems are described, which can be object of statistical inference on the base of this model. Methods of the testing are proposed and the whole of considerations is illustrated by empirical example based on real data. Limitations connected with accepted model's assumptions, selected estimation's and testing's methods are given. Finally, importance of the model for development of the corresponding methodology is described.

### STRESZCZENIE

W pracy opisano ideę podejścia statystycznego w metodzie DEA na przykładzie jednoproduktowego modelu Bankera. Przedstawiono jego założenia i wynikające z nich własności estymatora DEA wartości funkcji produkcji w punkcie. Opisano wybrane problemy, które mogą być przedmiotem wnioskowania statystycznego na gruncie tego modelu. Zaproponowano także sposoby ich testowania, ilustrując całość rozważań przykładem empirycznym opartym na danych rzeczywistych. Podano również ograniczenia związane z przyjętymi założeniami modelowymi, wybraną metodą estymacji i sposobami testowania. Na koniec opisano znaczenie jednoproduktowego modelu Bankera dla rozwoju metodologii w tym zakresie.

### KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

metoda DEA, nieparametryczny model graniczny, miara nieefektywności/efektywności,  
wnioskowanie statystyczne

DEA method, nonparametric frontier model, measure of inefficiency/efficiency,  
statistical inference

## 1. PODEJŚCIE STATYSTYCZNE W METODZIE DEA

Klasyczna wersja metody analizy otoczki danych (DEA) ma charakter deterministyczny. W analizie procesu produkcyjnego wyraża się on przekonaniem, że na podstawie dostępnych danych, jesteśmy w stanie skonstruować *prawdziwy* zbiór możliwości produkcyjnych reprezentowany przez któryś z wariantów technologii płatom liniowej — zob. Prędkie (2006, 2012a). Tym samym, dla sytuacji jedno-produktowej, można również skonstruować *prawdziwą*, kawałkami liniową funkcję produkcji. Przyjęto więc, iż miary efektywności technicznej, skonstruowane na tej podstawie mierzą poziom efektywności *dokładnie*. Jednak błędy w danych, ich niepełność, ciągła zmienność, czy brak istotnych informacji o procesie produkcyjnym mogą przecież wypaczyć uzyskane rezultaty.

W podejściu statystycznym w metodzie analizy otoczki danych podchodzimy więc z dużą ostrożnością do jakości zebranych danych, a w konsekwencji do wyników uzyskanych za ich pomocą. Ową niepewność, związaną z danymi empirycznymi i wartościami miar efektywności technicznej, próbuje się tu opisywać i wyjaśniać przy użyciu odpowiednich modeli statystycznych. Rozważane modele zawierają większość założeń deterministycznych obecnych w klasycznej wersji metody, zob. np. Prędkie (2003), oraz założenia o charakterze stochastycznym, których zadaniem jest opis wspomnianej niepewności, związanej z danymi oraz z uzyskiwanymi wartościami miar efektywności technicznej. Wykorzystywane modele mają zwykle charakter nieparametryczny bądź semiparametryczny. Wiąże się to z postulatem, obecnym w deterministycznej wersji metody, by nie wprowadzać arbitralnych zależności analitycznych np. postaci granicy produkcyjnej. Przekłada się on również na część stochastyczną modelu, gdzie unika się z kolei założeń o charakterze parametrycznym, dotyczących np. postaci rozkładów zmiennych losowych występujących w modelu. Jeśli jest to niezbędne dla uzyskania zgodnej estymacji miary efektywności czy silniejszego wnioskowania, wprowadza się odpowiednie założenia parametryczne. W dalszym ciągu jednak postać granicy produkcyjnej nie jest zadana analitycznie. Powstaje wtedy model o charakterze semiparametrycznym.

W podejściu statystycznym zakłada się więc, iż *prawdziwa* postać zbioru możliwości produkcyjnych, a tym samym funkcji produkcji (dla przypadku jedno-produktowego) nie jest znana. W konsekwencji nie znana jest również *prawdziwa* wartość miary efektywności technicznej danej jednostki produkcyjnej. Deterministyczna wersja metody DEA służy tu właśnie aproksymacji *prawdziwej* postaci zbioru możliwości produkcyjnych oraz estymacji *prawdziwej* wartości miary efektywności technicznej danej jednostki produkcyjnej. W niektórych modelach wylicza się również mierniki rozproszenia związane z niepewnością dokonywanej estymacji. Konstruuje się np. aproksymacje przedziałów ufności oraz oceny obciążenia, czy wariancji związanej z estymowanymi wartościami miar. Możliwe jest także ogólniejsze wnioskowanie statystyczne związane nie tylko z warto-

ściami miar, ale z własnościami i charakterystykami nieznannej technologii. Przykładowo testuje się wypukłość zbioru możliwości produkcyjnych czy typ efektu skali charakteryzujący technologię. Dla sytuacji jednoproduktowej możliwe jest również wnioskowanie dotyczące wartości innych charakterystyk procesu produkcyjnego.

Oczywiście owa aproksymacja i estymacja jest odpowiedniej jakości tzn. charakteryzuje się określonymi własnościami statystycznymi. Głównie chodzi tu o własność zgodności estymatorów miar efektywności technicznej ale nie tylko, zob. Prędko (2010a, 2010b). Są to jednak dużo „słabsze” własności niż te uzyskiwane dla metod estymacji wykorzystywanych w modelach parametrycznych procesu produkcyjnego, zob. Kumbhakar i Lovell (2000). Wynika to po części z faktu, iż chcąc dotrzymać postulatu unikania arbitralnych założeń o charakterze parametrycznym, godzimy się tym samym na model mniej informacyjny. Jednak estymacja za pomocą DEA „przegrywa” z klasycznymi metodami estymacji typu MNW czy MNK również na gruncie wspomnianych modeli parametrycznych. Sposób jej realizacji implikuje bowiem konieczność założenia wypukłości zbioru możliwości produkcyjnych oraz tzw. jednostronnego składnika losowego dla uzyskania podstawowej własności zgodności. W przypadku dwustronnych lub złożonych składników losowych, czy giętkiej formy funkcyjnej w modelu, jak dotychczas nie dowiedziano nawet zgodności tzw. estymatorów DEA. Z drugiej strony należy podkreślić, że estymacja za pomocą metody analizy otoczki danych wartości miary efektywności technicznej zachowuje własność zgodności w przypadku wieloproduktowym i to bez konieczności znajomości postaci analitycznej funkcji transformacji.

## 2. MODEL JEDNOPRODUKTOWY BANKERA

Pierwszym chronologicznie modelem, stanowiącym podstawę podejścia statystycznego do modelowania zmienności danych w metodzie DEA, jest tzw. jednoproduktowy model Bankera, zaproponowany w pracy: Banker (1993). W literaturze przedmiotu model ten nie ma nazwy własnej. Jednak ze względu na jego znaczenie dla rozwoju metodologii autor niniejszego opracowania proponuje wprowadzenie określenia związanego z nazwiskiem jego twórcy.

Przyjmuje się w nim, iż wytwarzany jest tylko jeden rodzaj produktu, co umożliwia zapisanie odpowiednich założeń za pomocą pojęcia funkcji produkcji. To zaś z kolei pozwala wykorzystać pewne idee modelowania charakterystyczne dla parametrycznych modeli statystycznych procesu produkcyjnego. Zaznaczmy jednak wyraźnie, iż jednoproduktowy model Bankera, w swej podstawowej wersji jest modelem nieparametrycznym. Przypomnijmy bowiem po raz kolejny, że w DEA unikamy arbitralnych założeń parametrycznych. Wprowadza się tu wprawdzie pojęcie składnika losowego, jednak założenia o nim również mają charakter nieparametryczny.

Przejdźmy teraz do szczegółów i przedstawmy odpowiednie postulaty. Zostały one przeformułowane i uzupełnione w porównaniu z pracą źródłową — Banker (1993), dla zwiększenia czytelności i spójności wyводу.

Pierwszy z nich jest zapisem założeń obecnych w deterministycznej wersji metody przy użyciu funkcji produkcji.

**Założenie 1:** Jednostki produkcyjne wytwarzają *jedyn* rodzaj produktu z  $m$  rodzajów nakładów i posługują się tą samą technologią reprezentowaną przez nie-malejącą, wklęsłą funkcję produkcji  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $X$  jest wypukłym i zwartym podzbiorem  $\mathbb{R}_{+0}^m$ .

W praktyce zawsze można przyjąć konkretne wielkości ograniczające dany zbiór nakładów  $X$ , co gwarantuje jego zwartość. Własności zbioru  $X$  i funkcji  $g$  zawarte w założeniu 1 implikują ciągłość granicy produkcyjnej (zob. Banker (1993), przypis 4). Z kolei własność ciągłości  $g$  jest wykorzystywana w dowodzie zgodności estymatora DEA.

Kolejne założenia mają charakter stochastyczny, opisują sposób generowania obserwacji oraz modelują niepewność związaną ze zmiennością danych.

**Założenie 2:** Dane są ilości użytych nakładów i wytworzonych produktów dla  $n$  producentów w postaci próby  $\chi_n = ((x_j, y_j) \in X \times \mathbb{R}_+, j = 1, \dots, n)$  rozumianej jako realizacja ciągu wektorów losowych o tym samym rozkładzie.

Tak samo jak realizację będziemy oznaczać sam ciąg wektorów losowych. Z kontekstu będzie zawsze jasno wynikać, którą interpretację należy przyjąć. Podobną konwencję przyjmuje się w modelach regresyjnych, gdzie zmienną objaśnianą i objaśniającą oznacza się często identycznie jak ich realizację.

W celu zapisania dalszych założeń wprowadźmy następującą definicję.

**Definicja 1:** Wyrażenie  $\varepsilon_j = g(x_j) - y_j$ , będziemy nazywać  **$j$ -tym odchyleniem** od granicy produkcyjnej.

W metodzie DEA rozważa się zwykle miary *efektywności* technicznej, jednak ze względu na nieujemny znak tego odchylenia i jego znaczenie w podobnych modelach parametrycznych przyjmuje się tutaj, iż jest on miarą *nieefektywności* (por. Kumbhakar i Lovell (2000)).

Przedstawmy dwa kolejne założenia.

**Założenie 3:** Odchylenia od granicy produkcyjnej są zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, reprezentowanym przez gęstość  $f$ :

$$\forall z < 0: f(z) = 0.$$

Założenie to implikuje w szczególności, iż znaki odchyłeń  $\varepsilon_j$  są nieujemne z prawdopodobieństwem jeden. Odchylenie to jest więc odpowiednikiem jednostronnego składnika losowego w modelach parametrycznych. A to z kolei oznacza, że podwykres  $g$  obejmuje zaobserwowane dane.

Założenie czwarte daje możliwość rozważania wyrażeń  $g(x_j)$  i  $\varepsilon_j$  niezależnie, co bardzo upraszcza ich estymację.

**Założenie 4:** Dla dowolnego  $j = 1, \dots, n$ , rozkład odchylenia  $\varepsilon_j$  jest niezależny od rozkładu wektora  $x_j$ .

W niektórych przypadkach będziemy przyjmować alternatywnie dodatkowe postulaty.

**Założenie 5:** Gęstość  $f$  jest nierosnąca dla  $z \geq 0$  tzn.:

$$\forall 0 \leq z_1 \leq z_2: f(z_1) \geq f(z_2).$$

**Założenie 6:** Odchylenia  $\varepsilon_j$  są niezależnymi zmiennymi losowymi, dla  $j = 1, \dots, n$ .

**Założenie 7:** Wektor  $x_j$  charakteryzuje się gęstością  $h$ :

$$\forall x \in X: h(x) > 0.$$

**Założenie 8:** Dla dystrybuanty odchylenia  $\varepsilon_j$  zachodzi warunek:

$$\forall z > 0: F(z) > 0.$$

Parametrami podlegającymi estymacji na bazie zdefiniowanego modelu będą wartości  $g(x_j)$ , dla  $j = 1, \dots, n$ . Liczba parametrów rośnie tu więc wraz ze wzrostem liczebności próby, w przeciwieństwie do modeli parametrycznych, gdzie estymujemy wspólny dla wszystkich obserwacji zestaw parametrów tworzący analityczną postać  $g$ .

Formalnie estymację można przeprowadzić dla dowolnej wartości  $g(x_0)$ , przy ustalonym  $x_0 \in X$ .

**Definicja 2:** Estymator DEA wartości  $g(x_0)$ :

$$g_{\text{DEA}}(x_0) = \max \{y: \exists \lambda_j \geq 0: x_0 \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1\}.$$

Jest to jednoproduktowa wersja deterministycznego modelu z pracy: Banker, Charnes i Cooper (1984). Od inicjałów autorów tego źródłowego artykułu nosi on nazwę modelu BCC zorientowanego na produkty.

Za jego pomocą można też estymować odchylenie od granicy produkcyjnej, czyli miarę nieefektywności technicznej.

**Definicja 3:** Estymator DEA  $j$ -tego odchylenia od granicy produkcyjnej:

$$\varepsilon_{j,\text{DEA}} = g_{\text{DEA}}(x_j) - y_j.$$

Ze względu na rolę miernika nieefektywności jaką pełni odchylenie mówi się tu o jego estymacji, szczególnie w kontekście wniosku 1 (zob. też Banker (1993), s. 1268).

Przejdźmy teraz do własności wprowadzonych estymatorów.

**Twierdzenie 1:** Estymator DEA jest estymatorem MNW wartości  $g(x_j)$ , tzn. wartości  $g_{\text{DEA}}(x_j)$  są rozwiązaniem optymalnym problemu:

$$\max_{f, g} \prod_{j=1}^n f(\varepsilon_j),$$

gdzie:  $f, g$  — spełniają założenia 1–6 modelu Bankera.

Zapisując w ten sposób funkcję wiarygodności korzystamy już oczywiście z założeń 3, 4 i 6.

**Twierdzenie 2:** Jeśli spełnione są założenia 1–4 oraz 7–8 to estymator  $g_{\text{DEA}}(x_0)$  jest zgodny dla  $x_0$  z wnętrza zbioru  $X$ , rozumianego w sensie topologicznym — zob. np. Engelking (1976).

**Wniosek 1:** Przy założeniach jak w twierdzeniu 2, rozkład asymptotyczny estymatora  $\varepsilon_{j,\text{DEA}}$  jest identyczny z rzeczywistym rozkładem odchylenia  $\varepsilon_j$ .

**Twierdzenie 3:** Jeśli spełnione są założenia 1–4 i 6 oraz  $F(0) < 1$  to estymator  $g_{\text{DEA}}(x_0)$  jest obciążony.

Własność minimalności rozszerzenia estymatora DEA oraz założenie  $F(0) < 1$  implikuje dodatkowo dodatni znak obciążenia  $E[g(x_0) - g_{\text{DEA}}(x_0)]$ . Mówi się wtedy, że estymator ten jest obciążony do wewnątrz (z ang. *inward biased estimator*). Własność minimalności rozszerzenia polega na tym, że podwykres każdej funkcji produkcji spełniającej założenia modelu Bankera zawiera podwykres aproksymanty  $g_{\text{DEA}}$ . Dowody powyższych twierdzeń i wniosku zawarte są w artykule źródłowym — Banker (1993).

Podsumowując, jest to model procesu produkcyjnego, w którym spełnione jest dla każdej obserwacji  $j = 1, \dots, n$ , klasyczne równanie:

$$y_j = g(x_j) - \varepsilon_j.$$

Addytywny i jednostronny składnik losowy będący odchyleniem od granicy produkcyjnej pełni rolę miernika nieefektywności technicznej obiektu  $j$ -tego. Jednym, ze źródeł losowości jest tu więc nieefektywność procesu produkcyjnego. Zwróćmy jednak uwagę, że formalnie losowe są również wielkości wchodzące w skład wektora nakładów  $x_j$ . Oznacza to, że granica produkcyjna nie jest deterministyczna, ponadto przypomnijmy, iż nie jest ona zadana analitycznie. Brak dwustronnego czy złożonego składnika losowego świadczy o nie uwzględnieniu innego źródła losowości jakim są szoki zewnętrzne mogące wpływać na wielkość produktu. DEA jest tu metodą estymacji funkcji produkcji w punkcie, a przez to pośrednio również odchylenia od granicy produkcyjnej. Dzięki temu możliwe jest uzyskanie zgodnej oceny tego miernika nieefektywności technicznej.



### 3. ZASTOSOWANIA MODELU BANKERA

Rozszerzenie deterministycznej metody analizy otoczki danych i osadzenie jej w szerszym kontekście modelu statystycznego, jako metody estymacji jego parametrów, miało na celu modelowanie zmienności danych i niepewności odnośnie wartości miary nieefektywności technicznej. Dzięki odpowiedniej konstrukcji modelu przez Bankera możliwe stało się dowiedzenie, iż oceny miar nieefektywności uzyskiwane za pomocą metody DEA mają określone własności statystyczne. Nie możemy jednak zapominać, iż model statystyczny służy przede wszystkim celom wnioskowania statystycznego. Omówimy teraz problemy, które testuje się w ramach jednoproduktowego modelu Bankera.

#### 1. Testowanie istotności różnic pomiędzy dwiema grupami obserwacji.

Jeśli podejrzewamy, że grupa  $n$  jednostek produkcyjnych nie jest z jakiegoś powodu jednorodna (tzn. pochodzi z dwóch, różnych populacji) możemy to testować. Zakładamy, że owa niejednorodność przekłada się na istotne różnice pomiędzy wartościami miar nieefektywności obu grup. Testujemy więc podobieństwo rozkładów wartości miar lub istotność różnicy między średnimi wartościami miar z obu grup.

#### 2. Testowanie globalnego typu efektu skali

Jest to element weryfikacji modelu dotyczący jednej z charakterystyk nieznannej technologii wyrażonej funkcją produkcji  $g$ . Ustalenie właściwego typu efektu skali wpływa na postać funkcji produkcji, jest to więc po części odpowiednik testowania jej postaci analitycznej na gruncie modeli parametrycznych.

#### 3. Testowanie specyfikacji modelu

Ustalenie listy nakładów istotnie wpływających na produkt i ogólnie na technologię jest sprawą kluczową dla wstępnej specyfikacji modelu. W modelach parametrycznych również testuje się zestawy zmiennych objaśniających, będących odpowiednikami nakładów (metoda Hellwiga czy analizy grafów). W naszym modelu nieparametrycznym, gdzie nie zadajemy analitycznie postaci funkcji produkcji, jest to szczególnie istotna kwestia. Tym większe znaczenie mają bowiem wtedy przyjęte do analizy zestawy nakładów. Za pomocą metody DEA testuje się głównie istotność uzupełnienia wyjściowego zestawu nakładów o nowe ich rodzaje.

Schemat testowania wszystkich omówionych problemów jest podobny jak w punkcie pierwszym. Mamy zawsze wyodrębnione dwie grupy jednostek produkcyjnych, w związku z tym mamy również odpowiadające im dwie grupy nieznanymi wartości miar nieefektywności technicznej. Obliczamy estymatory DEA miary nieefektywności także w podziale na grupy, które traktujemy jak dwie, niezależne grupy obserwacji. Następnie za pomocą odpowiednich testów niepa-

rametrycznych badamy podobieństwo ich rozkładów empirycznych. Wykorzystuje się tu najczęściej test Kolmogorowa-Smirnowa, ale również test Welcha czy Manna-Whitney'a — zob. Banker, Conrad i Strauss (1986), Banker i Chang (1995).

Banker wprowadza też do analiz testy parametryczne oparte na założeniu, iż miara nieefektywności technicznej ma określony rozkład parametryczny spełniający założenia modelowe. Podobnie jak w modelach parametrycznych, rozważa się tu zwykle rozkład wykładniczy albo półnormalny.

Autor uzasadnia swój pomysł odpowiednimi eksperymentami symulacyjnymi. W ramach symulacji znamy postać funkcji produkcji  $g$ , a tym samym rzeczywiste wartości miary nieefektywności technicznej. Możliwe jest więc zliczanie błędów I i II rodzaju popełnianych w poszczególnych testach. Ich liczba służy porównaniu skuteczności odpowiednich testów. Uzyskane wyniki wskazują, iż zaproponowane testy parametryczne są pod tym kątem porównywalne z używanymi zwykle testami nieparametrycznymi, a w niektórych sytuacjach dają nawet wyniki lepsze. Wykazuje on, iż odpowiednie testy są również konkurencyjne w stosunku do innych testów parametrycznych, w których metodą estymacji jest skorygowana MNK (SMNK). Wybór SMNK nie jest przypadkowy, gdyż podobnie jak DEA jest to metoda estymacji wykorzystywana przy jednostronnych odchyleniach od granicy produkcyjnej.

Przyjęcie parametrycznych rozkładów odchyłeń oznacza jednak wprowadzenie arbitralnych założeń parametrycznych do modeli wyjściowych. Nie są one bowiem w żaden sposób testowane. Mamy więc model semiparametryczny, czyli teoretycznie bardziej informacyjny. Wprawdzie eksperymenty symulacyjne wskazują, że wnioskowanie może być wtedy silniejsze, ale pewności w tym zakresie mieć nie można. W ramach symulacji analizujemy przecież jedynie wybrane przypadki, a nie wszystkie możliwe. Szczegóły tych symulacji i uzyskane wyniki dostępne są w pracach Banker i Chang (1995) oraz Banker (1996). Jeśli chodzi o własności statystyczne estymatora DEA, to sytuacja nie ulega zmianie. W oparciu o nowe założenia nie wykazano bowiem jakichś kolejnych własności statystycznych estymatora DEA (np. efektywności, nieobciążoności czy choćby szybszej zbieżności).

Szczegóły oraz pogłębiony schemat testowania zostaną zilustrowane w części empirycznej pracy. Warto zaznaczyć, że idea modelowania zastosowana przez Bankera ma swoje źródła w bogatym dorobku związanym z modelami parametrycznymi procesu produkcyjnego, gdzie podobne struktury formalne funkcjonują już od przełomu lat 60-tych i 70-tych ubiegłego wieku — zob. prace źródłowe: Aigner i Chu (1968), Timmer (1971), Afriat (1972), Richmond (1974), Schmidt (1976). Granica produkcyjna jest w nich jednak zadana analitycznie w postaci funkcji liniowej lub logliniowej parametrów wspólnych dla wszystkich obserwacji. Ponadto w większości tych modeli jednostronny składnik losowy ma rozkład parametryczny. Wyjątkiem jest model z pracy Aigner i Chu (1968), który ma charakter czysto deterministyczny.



Większa informacyjność modeli parametrycznych umożliwia nie tylko obliczenie ocen mierników nieefektywności o określonych własnościach statystycznych, ale także szersze wnioskowanie statystyczne. W jego skład wchodzi:

- ocena charakterystyk rozproszenia mierników nieefektywności, która z kolei umożliwia konstrukcję odpowiednich przedziałów ufności;
- testowanie hipotez dotyczących wartości tychże miar oraz charakterystyk procesu produkcyjnego;
- weryfikacja założeń modelowych.

#### 4. OPIS WYKORZYSTANYCH TESTÓW

W części empirycznej wykorzystamy przykładowo trzy testy wspomniane w pracach źródłowych (Banker (1993, 1996)), preferowane przez autora opisanego modelu.

##### 1. Test Kołmogorowa — Smirnowa

Z testów nieparametrycznych największą popularnością w pracach Bankera cieszy się test Kołmogorowa — Smirnowa zgodności rozkładu pewnej cechy  $X$  w dwóch populacjach. Statystyka testowa ma tu postać:

$$K = \sqrt{\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}} \sup_x |F_{N_1}(x) - F_{N_2}(x)|,$$

gdzie  $F_i(\cdot)$ , dla  $i = N_1, N_2$ , oznacza dystrybuantę empiryczną cechy dla grupy obserwacji pobranych z odpowiedniej populacji. Dzięki twierdzeniu Smirnowa rozkład tej statystyki jest znany i stabilizowany. Dla zadanego poziomu istotności  $\alpha$  odczytujemy więc wartość krytyczną  $K_\alpha$ . Jeśli  $K > K_\alpha$ , to hipotezę zerową o zgodności rozkładów cechy w obu populacjach odrzucamy, w przeciwnym razie nie ma podstaw do jej odrzucenia.

##### 2. Test parametryczny oparty na rozkładzie wykładniczym cechy

Przyjmuje się założenie, że cecha w obu populacjach ma rozkład wykładniczy o nieznanym parametrze odpowiednio  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ . W takiej sytuacji testowanie zgodności tych rozkładów polega na testowaniu równości  $\lambda_1 = \lambda_2$  zawartej w hipotezie zerowej. Ponownie pobieramy próby z obu populacji i obliczamy dla nich wartości cechy oznaczone odpowiednio przez  $x_1, \dots, x_{N_1}$  oraz  $y_1, \dots, y_{N_2}$ . Statystyka testowa:

$$F_{\text{EXP}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} x_i / N_1}{\sum_{i=1}^{N_2} y_i / N_2}$$

przy przyjętym założeniu i prawdziwości hipotezy zerowej ma rozkład F o parze stopni swobody ( $2N_1, 2N_2$ ). Dla zadanego poziomu istotności  $\alpha$  odczytujemy więc wartość krytyczną  $F_\alpha$  z tego rozkładu. Jeśli  $F_{\text{EXP}} > F_\alpha$ , to hipotezę zerową o zgodności rozkładów cechy w obu populacjach odrzucamy, w przeciwnym razie nie ma podstaw do jej odrzucenia.

### 3. Test parametryczny oparty na rozkładzie półnormalnym cechy

Przyjmuje się założenie, że cecha w obu populacjach ma rozkład półnormalny o nieznanym parametrze odpowiednio  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ . W dalszym ciągu testowanie przebiega analogicznie jak w poprzednim punkcie z tym, że używa się statystyki:

$$F_{\text{HN}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} x_i^2 / N_1}{\sum_{i=1}^{N_2} y_i^2 / N_2}$$

która przy przyjętym założeniu i prawdziwości hipotezy zerowej o równości parametrów ma rozkład F o parze stopni swobody ( $N_1, N_2$ ).

Cechą będącą przedmiotem testowania jest odchylenie od granicy produkcyjnej, natomiast zasada podziału na grupy będzie zależała od wybranego problemu będącego przedmiotem wnioskowania statystycznego.

## 5. CZĘŚĆ EMPIRYCZNA

Przejdziemy teraz do ilustracji wnioskowania statystycznego opisanego w części trzeciej i czwartej pracy na przykładzie empirycznym, opartym na danych rzeczywistych z polskiego sektora energetycznego. Dane pochodzą z pracy: Osiewalski i Wróbel-Rotter (2002) i dotyczą ilości określonych nakładów oraz jednego produktu 32 polskich elektrowni i elektrociepłowni w latach 1995–1996. Za nakłady obiektów przyjęto:

- kapitał (wartość brutto środków trwałych liczona w zł.);
- pracę (liczba pracowników);
- energię wsadu (liczoną w TJ).

Jedynym produktem działalności jednostek jest wytworzona energia (liczona w TJ). Jednostką energii jest tu teradžul (1GWh = 3,6TJ).

Powróćmy do problemów badawczych opisanych w części trzeciej pracy.

### 1. Testowanie istotności różnic pomiędzy dwiema grupami obserwacji.

Potraktujemy zbiory możliwości produkcyjnych opisujące technologie w latach 1995 i 1996 jako dwie osobne populacje. Mamy dane po 32 obserwacje dotyczące każdego ze zbiorów. Weryfikujemy hipotezę zerową, że technologia nie uległa znaczącym zmianom z roku 1995 na rok 1996. Zgodnie z omówionym już

Tabela 1

Estymatory DEA odchyłeń od granicy produkcyjnej dla lat 1995 i 1996 (kol. 2–3),  
statystyki empiryczne, wartości krytyczne i wyniki odpowiednich testów,  
przy poziomie istotności  $\alpha = 0,05$  (kol. 4–7)

o	$\varepsilon_{o,DEA.95}$	$\varepsilon_{o,DEA.96}$	$\alpha = 0,05$	K-S	EXP	HN
1	0,00	0,00	s.emp.	0,375	1,054	1,198
2	0,00	0,00	w.kryt.	1,360	1,513	1,804
3	0,00	0,00	wynik	H0	H0	H0
4	0,00	0,00				
5	12891,58	14371,65				
6	8403,69	8011,83				
7	8986,75	7602,05				
8	0,00	0,00				
9	815,42	9464,38				
10	9752,32	10412,27				
11	0,00	0,00				
12	7481,56	10754,48				
13	8063,59	7484,73				
14	387,24	0,00				
15	0,00	0,00				
16	3302,32	3514,79				
17	3333,70	1593,46				
18	0,00	0,00				
19	342,39	490,47				
20	474,32	92,39				
21	4260,55	4107,72				
22	6267,13	3467,75				
23	0,00	0,00				
24	1360,61	989,81				
25	1359,38	1326,36				
26	1953,60	1864,82				
27	1658,23	675,16				
28	739,74	0,00				
29	0,00	0,00				
30	0,00	0,00				
31	0,00	0,00				
32	0,00	0,00				

Źródło: obliczenia własne.

tokiem rozumowania obliczamy wartości estymatora DEA odchyłeń od granicy produkcyjnej dla obu lat osobno i badamy podobieństwo ich rozkładów empirycznych za pomocą testów omówionych w części czwartej pracy.

Widoczne jest, iż wszystkie testy wskazują na brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej (wiersz o nazwie „wynik” w tabeli 1). Dochodzimy więc do konkluzji, że wszystkie trzy testy potwierdzają, iż technologia nie uległa znaczącym zmianom z roku 1995 na rok 1996.

## 2. Testowanie globalnego typu efektu skali

Zweryfikujemy przykładowo hipotezę, iż technologia w roku 1995 charakteryzuje się globalnie stałymi efektami skali (szerszy przegląd problemów z tego zakresu będzie dostępny w pracy: Prędkie (2012b)). W tym celu obliczamy najpierw wartości estymatora DEA granicy produkcyjnej za pomocą danych z roku 1995, przy założeniu stałego efektu skali ze wzoru:

$$g_{\text{DEA}}(\mathbf{x}_o) = \max \{y: \exists \lambda_j \geq 0: \mathbf{x}_o \geq \sum_{j=1}^n \lambda_{jo} \mathbf{x}_j, y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_{jo} y_j\},$$

a następnie odpowiednie oceny odchyłeń ze wzoru:

$$\varepsilon_{o,\text{CRS}} = g_{\text{CRS}}(\mathbf{x}_o) - y_o,$$

dla  $o = 1, \dots, n$ . Użyty indeks CRS pochodzi od nazwy *Constant Returns to Scale*. Wzór różni się od tego na  $g_{\text{DEA}}(\mathbf{x}_o)$  jedynie brakiem warunku sumowalności zmiennych  $\lambda_{jo}$  do jedności (jest to tzw. model CCR zorientowany na produkty).

Tym razem wyniki testowania nie są zgodne. Wynik testu nieparametrycznego sugeruje przyjęcie założenia o globalnie stałych efektach skali. Natomiast testy parametryczne odrzucają tę hipotezę. Nie oznacza to jednak, że wskazują one na zmienny efekt skali. Mogą bowiem występować również tzw. globalnie nierosnące lub niemalejące efekty skali — zob. np. Prędkie (2012b).

## 3. Testowanie specyfikacji modelu

Zweryfikujemy przykładowo hipotezę, że czynnik kapitału ma nieistotny wpływ na technologię w roku 1995. W tym celu obliczymy wartości estymatora DEA odchylenia dla wszystkich obiektów w dwóch wariantach. W pierwszym zakładamy jak dotychczas, iż wykorzystujemy do produkcji wszystkie trzy nakłady (wartości  $\varepsilon_{o,\text{DEA}}$ ). W drugim natomiast przyjmujemy, że nakładami są tylko praca i energia wsadu (wartości  $\varepsilon_{o,-\text{kap}}$ ).

Podobnie jak w problemie pierwszym, wszystkie trzy testy sugerują przyjęcie hipotezy zerowej. Nie stwierdzono więc istotnych różnic pomiędzy rozkładami empirycznymi obu grup wartości. Oznacza to, że czynnik kapitału ma nieistotny wpływ na technologię w roku 1995 i można go pominąć.

Tabela 2

Estymatory DEA odchyłeń od granicy produkcyjnej dla roku 1995, przy założeniu stałych i zmiennych efektów skali (kol. 2–3), statystyki empiryczne, wartości krytyczne i wyniki odpowiednich testów, przy poziomie istotności  $\alpha = 0,05$  (kol. 4–7)

o	$\varepsilon_{o,CRS}$	$\varepsilon_{o,DEA}$	$\alpha = 0,05$	K-S	EXP	HN
1	26844,16	0,00	s.emp.	0,875	2,266	5,413
2	0,00	0,00	w.kryt.	1,360	1,513	1,804
3	4884,65	0,00	wynik	H0	H1	H1
4	0,00	0,00				
5	33538,23	12891,58				
6	16537,51	8403,69				
7	16315,83	8986,75				
8	150,86	0,00				
9	6201,30	815,42				
10	20964,13	9752,32				
11	0,00	0,00				
12	14431,85	7481,56				
13	13291,97	8063,59				
14	1767,34	387,24				
15	0,00	0,00				
16	3451,68	3302,32				
17	3555,64	3333,70				
18	0,00	0,00				
19	409,21	342,39				
20	1073,16	474,32				
21	4884,84	4260,55				
22	6407,43	6267,13				
23	0,00	0,00				
24	1374,56	1360,61				
25	2069,52	1359,38				
26	2185,35	1953,60				
27	1845,60	1658,23				
28	1431,14	739,74				
29	314,30	0,00				
30	952,21	0,00				
31	377,17	0,00				
32	185,25	0,00				

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 3

Estymatory DEA odchyłeń od granicy produkcyjnej dla roku 1995, przy różnych zestawach nakładów (kol. 2-3), statystyki empiryczne, wartości krytyczne i wyniki odpowiednich testów, przy poziomie istotności  $\alpha = 0,05$  (kol. 4-7)

o	$\varepsilon_{o,DEA}$	$\varepsilon_{o,kap}$	$\alpha = 0,05$	K-S	EXP	HN
1	0,00	0,00	s.emp.	0,750	1,402	1,495
2	0,00	11722,80	w.kryt.	1,360	1,513	1,804
3	0,00	0,00	wynik	H0	H0	H0
4	0,00	0,00				
5	12891,58	12891,59				
6	8403,69	8733,13				
7	8986,75	9579,91				
8	0,00	0,00				
9	815,42	815,43				
10	9752,32	9792,43				
11	0,00	0,00				
12	7481,56	7481,55				
13	8063,59	8073,88				
14	387,24	387,25				
15	0,00	0,00				
16	3302,32	6392,57				
17	3333,70	6954,77				
18	0,00	0,00				
19	342,39	342,38				
20	474,32	6279,00				
21	4260,55	4342,29				
22	6267,13	7801,53				
23	0,00	0,00				
24	1360,61	1360,61				
25	1359,38	4670,37				
26	1953,60	2093,74				
27	1658,23	1721,40				
28	739,74	1791,49				
29	0,00	125,88				
30	0,00	0,00				
31	0,00	1406,15				
32	0,00	0,00				

Źródło: obliczenia własne.



## 6. UWAGI KRYTYCZNE

Przeprowadzając powyższe elementy wnioskowania musimy mieć świadomość pewnych ograniczeń i słabości, które związane są z wybranym sposobem testowania oraz właściwościami samego modelu. Ze względu na to, iż estymator DEA odchylenia jest jedynie estymatorem zgodnym należy pamiętać, że wszelkie przeprowadzone testy mają charakter asymptotyczny. Potrzebna jest więc przynajmniej kilkudziesięcioelementowa grupa obserwacji. Szczególnie wymagający jest pod tym względem test Kolmogorowa-Smirnowa ze względu na swój nieparametryczny charakter. Jest on słabszy od wykorzystanych testów parametrycznych w tym właśnie sensie, iż dla odrzucenia hipotezy zerowej potrzebna jest tu często dużo większa liczba obserwacji niż w wykorzystanych testach parametrycznych. Wynika to z prostego faktu, iż testy nieparametryczne działają w oparciu o model mniej informacyjny, a dopływ informacji następuje tu głównie poprzez zwiększenie liczebności próby. W przykładzie empirycznym jest to widoczne przy testowaniu typu efektu skali, gdzie przy tej samej liczebności próby, testy parametryczne wskazują na istotność badanych różnic. Natomiast w przypadku testu nieparametrycznego różnice odpowiednich rozkładów wartości nie są jeszcze wystarczające dla odrzucenia hipotezy zerowej.

Wszystkie powyższe testy wymagają ponadto, by rozważane dwie próby były *niezależne*. W naszym przypadku nie mamy żadnej gwarancji, że tak rzeczywiście jest, aczkolwiek przy wzroście liczebności próby pewne eksperymenty symulacyjne wskazują, iż sytuacja pod tym kątem ulega poprawie ze względu na własność zgodności estymatora DEA — zob. Banker (1993), przypis 7; Banker (1996).

Problemem jest też występowanie stosunkowo dużej frakcji obiektów efektywnych technicznie, czyli takich, dla których wartość odchylenia wynosi zero. Dla przykładu w założeniach twierdzenia Smirnowa, na którym opiera się odpowiedni test, występuje założenie o ciągłości dystrybuanty nieznanego rozkładu odchylenia. Oznacza ono, iż prawdopodobieństwo wystąpienia w próbce dwóch jednakowych wartości powinno być równe zero. Tymczasem w każdej próbie będzie występować liczna frakcja odchyleń zerowych, co wynika z własności DEA czyli wybranej metody estymacji.

Przypomnijmy, iż w przypadku testów parametrycznych słabością jest też arbitralny wybór parametrycznego rozkładu odchylenia, który nie podlega weryfikacji. Ograniczenie stanowi również założenie wklęsłości funkcji produkcji przyjmowane w modelu. Jest ono niestety konieczne dla uzyskania zgodności estymatora DEA odchylenia od granicy produkcyjnej. Oznacza to, że prawdziwą granicą produkcyjną nie może być tu np. funkcja wklęsło-wypukła (np. giętka forma funkcyjna typu Translog). Jak w takim razie rozumiane są tu zmienne czy rosnące efekty skali? Odpowiedź na to pytanie autor niniejszej pracy próbuje udzielić w artykule: Prędko (2012b). Problem wiąże się oczywi-

ście z pytaniem, jak definiuje się różne typy efektów skali dla wypukłego zbioru możliwości produkcyjnych.

## 7. ZNACZENIE MODELU BANKERA

Mimo opisanych w poprzedniej części licznych ograniczeń wynikających z założeń modelowych, własności metody estymacji oraz wybranych sposobów testowania, jednoproduktowy model Bankera stał się podstawą podejścia statycznego w metodzie DEA. Już sam autor w pracy: Banker (1996) próbuje rozszerzyć go na przypadek wieloproduktowy. Możliwość analizy technologii wieloproduktowej jest bowiem uważana za jedną z zalet deterministycznej wersji metody, podnoszoną często w literaturze przedmiotu.

Kolejni badacze, tworzący podejście statystyczne w metodzie analizy otoczki danych, odwołują się do prac Bankera oraz korzystają po części z jego dorobku i przemysłów. Proponują oni pewne nowe rozwiązania modelowe oraz modyfikacje wyjściowej metody estymacji. Szczególnie istotne są tu prace Dietera Gstacha, Timo Kuosmanena oraz zespołu badawczego skupionego wokół Leopolda Simara.

Przykładem może tu być konstrukcja modeli w orientacji na nakłady. Owa dwuorientacyjność miar efektywności/nieefektywności jest przecież tak charakterystyczna dla metody DEA. Banker pominął ten aspekt, przypuszczalnie ze względu na chęć powiązania swej propozycji z istniejącymi modelami parametrycznymi. Tradycyjna mikroekonomiczna i ekonometryczna analiza procesu produkcyjnego jest bowiem zwykle nastawiona na kwestię maksymalizacji produktu, a nie minimalizacji nakładu. W orientacji na nakłady rozważa się tu raczej kwestię minimalizacji kosztów, a nie bezpośrednio nakładów, czyli analizuje tzw. efektywność kosztową obiektów (a nie techniczną).

Innym przykładem jest kwestia aproksymacji zbioru  $T$  za pomocą wersji technologii płatami liniowych różnych od tej, która została wykorzystana w jednoproduktowym modelu Bankera. W sytuacji wieloproduktowej, przy braku analitycznej postaci funkcji transformacji, technologię opisuje zbiór możliwości produkcyjnych. W metodzie DEA podlega on aproksymacji w całości za pomocą tzw. technologii płatami liniowych — zob. np. Prędko 2010b, 2012a. W pracy Bankera (1993), przypis 3 — wspomina się jedynie, iż aplikowalność innych wersji przebiega poprzez analogię. Natomiast w pracy: Banker (1996), s. 148–149, wprowadza się dla celów testowania globalnych typów efektów skali estymatory DEA miary efektywności oparte na aproksymacji  $T$  za pomocą technologii płatami liniowych, gdzie zakładamy globalnie stały albo niemalejący efekt skali. Nie dowodzi się jednak własności statystycznych tych estymatorów, następuje jedynie rozszerzenie założeń modelowych odnośnie zbioru  $T$  o dodatkowe jego własności. Dopiero kolejni badacze analizują szerzej tą kwestię — zob. np. Park, Jeong i Simar (2010).

Powstał również pomysł na konstrukcję estymatora zgodnego miary efektywności/nieefektywności, który nie wymaga przyjmowania kłopotliwego założenia wypukłości zbioru  $T$ . Wykorzystano tzw. metodę FDH będącą modyfikacją metody analizy otoczki danych. Zbadane zostały własności tego estymatora oraz zaproponowano odpowiednią aproksymację zbioru  $T$  — szczegóły dostępne np. w pracy: Prędko (2010c). Dzięki temu stało się również możliwe testowanie założenia o wypukłości zbioru możliwości produkcyjnych, które jest przyjmowane m.in. w jednoproduktowym modelu Bankera — zob. Simar i Wilson (2011), rozdz. 5.2.

## BIBLIOGRAFIA

- Afriat S. N. (1972), *Efficiency estimation of production functions*, International Economic Review, 13, s. 568–598.
- Aigner D. J., Chu S. F. (1968), *On estimating the industry production function*, American Economic Review, 58, s. 826–839.
- Banker R. D. (1993), *Maximum Likelihood, Consistency and Data Envelopment Analysis: A Statistical Foundation*, Management Science, 39, s. 1265–1273.
- Banker R. D. (1996), *Hypothesis tests using Data Envelopment Analysis*, Journal of Productivity Analysis, 7, s. 139–159.
- Banker R. D., Chang H. (1995), *A simulation study of hypothesis tests for differences in efficiencies*, International Journal of Production Economics, 39, s. 37–54.
- Banker R. D., Charnes A., Cooper W. W. (1984), *Some models for estimating technical and scale inefficiencies in DEA*, Management Science, 30, s. 1078–1091.
- Banker R. D., Conrad R. F., Strauss R. P. (1986), *A comparative application of Data Envelopment Analysis and translog methods: an illustrative study of hospital production*, Management Science, 32, s. 30–44.
- Engelking R. (1976), *Topologia ogólna*, PWN Warszawa.
- Kumbhakar S.C., Lovell C. A. K. (2000), *Stochastic frontier analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Osiewalski J., Wróbel-Rotter R. (2002), *Bayesowski model efektów losowych w analizie efektywności kosztowej (na przykładzie elektrowni i elektrociepłowni polskich)*, Przegląd Statystyczny, 50, s. 47–68.
- Park B. U., Jeong S., Simar L. (2010), *Asymptotic distribution of conical-hull estimators of directional edges*, Annals of Statistics, 38, s. 1320–1340.
- Prędko A. (2003), *Analiza efektywności za pomocą metody DEA: podstawy formalne i ilustracja ekonomiczna*, Przegląd Statystyczny, 50, s. 87–100.
- Prędko A. (2006), *Definiowanie globalnego i lokalnego efektu skali w ramach badania efektywności metodą DEA*, Przegląd Statystyczny, 53, s. 57–72.
- Prędko A. (2010a), *Własności i zastosowanie estymatorów miar efektywności technicznej Farrella*, Metody i zastosowania badań operacyjnych (red. M. Nowak), Prace Naukowe UE w Katowicach, s. 175–194.
- Prędko A. (2010b), *Estymacja zbioru możliwości produkcyjnych w ramach formalnego modelu statystycznego*, Przegląd Statystyczny, 57, s. 3–18.
- Prędko A. (2010c), *Propozycja opisu niepewności w ramach metod DEA i FDH*, Współczesne tendencje rozwojowe badań operacyjnych (red. J. Siedlecki i P. Peternek), Prace Naukowe UE we Wrocławiu nr 108, s. 207–218.

- Prędko A. (2012a), *Geneza zbiorów możliwości produkcyjnych wykorzystywanych w metodzie DEA*, Zeszyty Naukowe UEP (w druku).
- Prędko A. (2012b), *Formalne testowanie typu efektu skali w ramach metody DEA*, Zeszyty Naukowe UEP (w druku).
- Richmond J. (1974), *Estimating the efficiency of production*, *International Economic Review*, 15, s. 515–521.
- Schmidt P (1976), *On the Statistical Estimation of Parametric Frontier Production Functions*, *Review of Economics and Statistics*, 58, s. 238–239.
- Simar L., Wilson PW. (2011), *Inference by the m out of n bootstrap in nonparametric frontier models*, *Journal of Productivity Analysis*, 36, s. 33–53.
- Timmer C. P (1971), *Using a probabilistic frontier production function to measure technical efficiency*, *Journal of Political Economy*, 79, s. 767–794.